

# **Entstehung und Ausbreitung von Schiffswellen in Binnen- und Küstengewässern**

**Von der Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abteilung Maschinenbau der  
Universität Duisburg-Essen  
zur Erlangung des akademischen Grades**

**DOKTOR-INGENIEUR**

**genehmigte Dissertation**

**von**

**Rupert Henn**

**aus**

**Trier**

**Referent: PD Dr.-Ing. habil Tao Jiang**

**Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. Sharma**

**Prof. Dr.-Ing. Abdel-Maksoud**

**Tag der mündlichen Prüfung: 05.12.2008**



---

# Inhalt

<b>1 Einführung.....</b>	<b>5</b>
<b>2 Mathematische Beschreibung der Flachwasserströmung.....</b>	<b>9</b>
2.1 Koordinatensystem.....	9
2.2 Differentialgleichungen zur Beschreibung des Strömungsfelds.....	10
2.3 Anfangs- und Randbedingungen.....	11
2.4 Beschreibung durch ein Strömungspotential.....	12
2.5 Flachwassergleichungen vom Boussinesq-Typ.....	13
2.6 Vereinfachte Approximation .....	18
2.7 Verbesserung des Dispersionsverhaltens.....	20
2.8 Beschreibung im Relativkoordinatensystem.....	22
2.9 Einbeziehen der Strömungswirkung.....	23
2.10 Bodenreibung.....	26
2.11 Coriolis-Kraft.....	28
<b>3 Approximation der schiffserzeugten Wellen.....</b>	<b>29</b>
3.1 Druckverteilung.....	29
3.2 Vereinheitlichte Flachwassertheorie.....	30
3.3 Schlankkörpertheorie.....	31
3.4 Kopplung mit einer externen Lösung.....	32
<b>4 Numerische Methoden und Implementierung.....</b>	<b>33</b>
4.1 Diskretisierung.....	33
4.1.1 Übergang zur finiten Differenz.....	34
4.1.2 Räumliche Ableitungen.....	36
4.1.3 Zeitliche Diskretisierung.....	38
4.2 Randbedingungen.....	38
4.2.1 Senkrechte Wände.....	38
4.2.2 Symmetrierand.....	39
4.2.3 Offene Ränder.....	39
4.2.4 Schlankkörpertheorie.....	40
4.3 Linearisierung.....	40
4.4 Implementierung.....	41

---

4.4.1	Bodentopographie.....	41
4.4.2	Elementare Differenzierungsfunktionen.....	43
4.4.3	Besetzen der Matrix und der rechten Seite.....	46
4.4.4	Lösung linearer Gleichungssysteme.....	47
4.4.4.1	Gauß-Seidel-Verfahren.....	48
4.4.4.2	GMRES.....	48
4.5	Filterung.....	49
4.5.1	Globale Filterung.....	49
4.5.2	Lokale Filterung.....	50
4.5.3	Spektrale Filterung.....	50
4.5.4	Schwamm.....	50
4.6	Gebietszerlegung und Kopplung mit anderen Berechnungsverfahren.....	51
4.6.1	Stationäre Kopplung mit einem potentialtheoretischen Paneelverfahren.....	52
4.6.1.1	Lösung im Innenfeld.....	53
4.6.1.2	Implementierung der Kopplung.....	53
<b>5</b>	<b>Simulationen.....</b>	<b>57</b>
5.1	Validierung.....	57
5.1.1	Zweidimensionale Wellenausbreitung.....	58
5.1.2	Ausbreitung einer Solitonwelle in einem dreidimensionalen Rechengebiet.....	75
5.1.3	Wellenbildung durch ein Küstenmotorschiff im Kanal.....	78
5.1.4	Wellenbildung durch ein Containerschiff in der Elbe.....	80
5.1.5	Strömung über eine getauchte Buhne.....	86
5.1.6	Trimm und Absenkung.....	90
5.1.7	Einfluß der Bodenreibung auf die Wellenbildung.....	93
5.1.8	Vereinheitlichte Flachwassertheorie – vertikal oszillierender Körper.....	99
5.1.9	Kopplung mit einem potentialtheoretischen Paneelverfahren.....	103
5.2	Praxisbeispiele.....	107
5.2.1	Einfluß der Kanalgeometrie.....	107
5.2.2	Wellen im Hafenbecken.....	109
5.2.3	Künstlich veränderte Bodentopographie zur Beschleunigung des Übergangs vom Tief- ins Flachwasser.....	110
5.2.4	Begegnungsverkehr und Überholmanöver.....	114
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>123</b>
<b>7</b>	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>127</b>



---

# Symbolverzeichnis

## Kleinbuchstaben

$g$	Erdbeschleunigung (9.80665 m/s <sup>2</sup> )
$h$	Wassertiefe
$h_0$	Konstante Wassertiefe
$q$	Verallgemeinerte Variable für beliebige Zustandsgrößen $\zeta$ , $\bar{u}$ oder $\bar{v}$
$\mathbf{q}$	Zustandsvektor an einem Punkt, $\mathbf{q}_{i,j}=[\zeta_{i,j}, u_{i,j}, v_{i,j}]^T$
$\bar{u}$	Vertikal gemittelte Geschwindigkeit in $x$ -Richtung
$u_c$	Strömungsgeschwindigkeit im Unendlichen
$u^c$	Vertikal gemittelte Geschwindigkeit aufgrund der Strömung
$u^w$	Vertikal gemittelte Geschwindigkeit aufgrund von Wellen
$\bar{\mathbf{u}}$	Vektor der gemittelten horizontalen Geschwindigkeitskomponenten, $\bar{\mathbf{u}}=[\bar{u}, \bar{v}]^T$
$\bar{v}$	Vertikal gemittelte Geschwindigkeit in $y$ -Richtung
$v^c$	Vertikal gemittelte Geschwindigkeit aufgrund der Strömung
$v^w$	Vertikal gemittelte Geschwindigkeit aufgrund von Wellen
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor, $\mathbf{v}=[u, v, w]^T$

## Großbuchstaben

$H$	lokale momentane Wasserhöhe
$K$	Gesamtzahl der Berechnungsknoten
$N$	Gesamtzahl der Zustandsgrößen
$V$	Schiffsgeschwindigkeit
$\mathbf{Q}$	Zustandssupervektor für alle Gitterpunkte $\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_N]^T$

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	dimensionsloser Zeitpunkt der Diskretisierung
$\eta, \xi$	Koordinaten im nicht-kartesischen Koordinatensystem
$\zeta$	Wellenerhebung
$\rho$	Dichte

## Indizes

$b$	am Boden
$f$	an der freien Oberfläche
$i, j$	Gitterkoordinaten in $x$ - bzw. $y$ -Richtung

## Hochindizes

$n$	Zeitschritt
$(\mu)$	Iterationsschritt



# 1 Einführung

Für die Untersuchung der von Schiffen erzeugten Wellen gibt es unterschiedliche Motive. Beim Entwurf von Schiffen ist man bestrebt, die Rumpfform so zu gestalten, daß das Schiff bei den vorgesehenen Einsatzbedingungen ein möglichst energiearmes Wellensystem erzeugt. Da der Anteil des Wellenwiderstands am Gesamtwiderstand mit zunehmender Schiffsgeschwindigkeit zunimmt, ist die Optimierung der Schiffsförm hin-sichtlich der Wellenbildung bei den heutzutage eingesetzten schnellen Schiffen von großer Bedeutung. Beim Betrieb eines Schiffs ist die Schiffsgeschwindigkeit dann so anzupassen, daß sich durch die Schiffswellen möglichst geringe Auswirkungen auf die Umgebung ergeben. So muß die Schiffsföhrung darauf achten, daß begegnender oder überholender Verkehr durch die schiffserzeugten Wellen nicht behindert oder gefährdet wird und daß durch den Schwell keine Beschädigungen am Ufer hervorgerufen werden. Besonders die divergenten Wellen können aber aufgrund schwacher Dämpfung weite Strecken zurücklegen. In flachen Uferbereichen steilen sie sich bis zum Brechen auf und können dort Sach- und Personenschäden hervorrufen, s. Feldtmann (2001). In Fällen, bei denen dies vom Schiffsföhrer nicht beurteilt werden kann, liegt es in der Verantwortung der zuständigen Behörden, die Wasserstraßen so auszubauen, daß durch den regulären Schiffsverkehr minimale Schäden entstehen, bzw. den Schiffsverkehr entsprechend zu regulieren. Dies geschieht durch Begrenzung der Schiffsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Bodentopographie und Kanalgeometrie.

Obwohl alle aufgeführten Aspekte eng miteinander verbunden sind, wurden verschiedene Untersuchungsmethoden entwickelt, die sich entweder mit der Erzeugung von Schiffswellen oder mit der Ausbreitung von Wellen in Gebieten mit seitlich und in der Tiefe begrenzten Gewässern beschäftigen, was sich auch in den eigenständigen Fachgebieten Schiffbau und Wasserbau widerspiegelt.

Eine bewährte Untersuchungsmethode sowohl im Schiffbau als auch im Wasserbau ist der Modellversuch. Im Schiffbau dient der Modellversuch in den meisten Fällen dazu, die auf das Schiff wirkenden hydrodynamischen Kräfte zu messen oder das See- oder

Manövrierverhalten zu untersuchen. Die Versuche werden dazu in einem Versuchsbekken mit ebenem Boden und senkrechten Wänden durchgeführt.

Versuchsanstalten, die sich mit Flachwasserhydrodynamik beschäftigen, und wasserbauliche Versuchsanstalten führen dagegen auch Versuche in Modellbecken durch, in denen eine unebene Bodentopographie (z. B. ein Flußlauf) modelliert wird. Die praktische Begrenzung der Größe des zu untersuchenden Gebiets stellt ein großes Problem dar, wenn zu große Maßstabeffekte vermieden werden müssen.

Neben der experimentellen Untersuchung werden für die unterschiedlichen Problemstellungen verschiedene numerische Berechnungsverfahren entwickelt. Im Schiffbau werden bereits seit der Mitte des letzten Jahrhunderts potentialtheoretische Verfahren entwickelt, mit denen das Wellenbild, und damit verbunden der Wellenwiderstand, berechnet werden kann. Diese Verfahren sind aber, wenn sie die nichtlineare Oberflächenverformung berücksichtigen, auf ein kleines Gebiet um das Schiff beschränkt. Bis auf wenige Ausnahmen können sie auch nur stationäre Berechnungen durchführen und sind damit nicht geeignet, die Fahrt eines Schiffs über einem unebenen Boden zu simulieren. Die Forschung im Bereich der numerischen Verfahren zur Strömungsberechnung (besser bekannt unter dem englischen Begriff CFD – Computational Fluid Dynamics) hat sich im Laufe der Zeit immer stärker auf die Berechnung der schiffsnahen Umströmung und Einbeziehung viskoser Effekte konzentriert. Während der Schiffbau an Details der Schiffsumströmung interessiert ist, beginnt die theoretische und numerische Entwicklung im Bereich des Wasserbaus bei langen Wellen, die durch Gezeiten oder Wind erzeugt werden. Die Beschreibung der Strömung erfolgt hier durch sog. Flachwassergleichungen, die im Laufe der Zeit immer weiter verfeinert wurden, um den Anwendungsbereich hin zu kürzeren Wellen zu erweitern und die Wechselwirkung zwischen Strömung, Bodentopographie und Wellen zu erfassen.

Flachwassergleichungen stellen eine vereinfachte Beschreibung der Strömung in endlich tiefem Wasser dar, indem für die vertikale Geschwindigkeitsverteilung ein analytischer Ansatz gewählt wird und dadurch die Beschreibung des Strömungsgebiets auf die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten und die Wellenerhebung reduziert wird. Das resultierende, zweidimensionale Strömungsproblem wird dann numerisch behandelt.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Flachwassergleichungen vom Boussinesq-Typ, deren Ursprung auf Boussinesq (1872) zurückgeht und deren Formulierungen von Mei und Le Méhauté (1966) und Peregrine (1967) heute als klassische Boussinesq-Gleichungen bezeichnet werden. Diese Gleichungen beschreiben die Ausbreitung langer Wellen in Gewässern mit variabler Wassertiefe. Zahlreiche Arbeiten beschreiben ebenfalls die Ausbreitung von Solitonwellen mit Hilfe anderer Gleichungen. So verwenden Chang et al. (1979) und Mathew et al. (1990) die Korteweg-de Vries-Gleichungen (KdV). Liu et al. (1985) untersuchen die Wellenausbreitung auch mit der Kadomtsev-Petviashvili-

Gleichung (K-P). Detaillierte Studien zu Ausbreitung und Verformung von zweidimensionalen Wellen bis hin zum Brechen erfolgten von Sugimoto et al. (1984, 1987), Longuet-Higgins (1976) und Sørensen et al. (1994).

Die klassischen Boussinesq-Gleichungen sind inzwischen in vielen Arbeiten untersucht und erweitert worden. Dabei liegen die Hauptanstrengungen darin, das Dispersionsverhalten zu verbessern. Die klassischen Boussinesq-Gleichungen ergeben eine mit kürzer werdenden Wellen zunehmend falsche Phasengeschwindigkeit. Durch Erweiterungen der Gleichungen mit Korrekturtermen kann dieser Fehler in bestimmten Maßen korrigiert werden. Beispielhaft sei hier auf die Arbeiten von Madsen (1991) und Madsen und Sørensen (1992) verwiesen. Einen etwas anderen Ansatz verfolgen Nwogu (1993) und Schröter (1995). Sie beschreiben das Strömungsgebiet nicht durch vertikal gemittelte horizontale Geschwindigkeitskomponenten, sondern durch horizontale Geschwindigkeitskomponenten in einer bestimmten Ebene.

Es gibt wenige Arbeiten, in denen die Ausbreitung von Schiffswellen mittels Flachwassergleichungen beschrieben wird. Einige Veröffentlichungen beschreiben die experimentelle Untersuchung von schiffserzeugten Solitonwellen, so z. B. Russell (1844), Ertekin et al. (1985). Ertekin et al. (1986) beschreiben die Wellenbildung durch eine Druckstörung auf der freien Oberfläche mit Hilfe der Green-Naghdi-Gleichungen im transkritischen Geschwindigkeitsbereich. Pedersen (1988) untersucht die Wellenbildung einer Oberflächenstörung ebenfalls bei transkritischer Geschwindigkeit mit Boussinesq-Gleichungen. Wu und Wu (1982) untersuchen die Wellenbildung durch eine Oberflächenstörung mit Boussinesq-Gleichungen im Geschwindigkeitsbereich  $F_{rh} = 0.4 \dots 1.4$ . Eine systematische Beschreibung der Wellenbildung von Schiffen im unter- bis überkritischen Geschwindigkeitsbereich erfolgt durch Jiang (2001). Hervorzuheben ist auch die Arbeit von Chen und Sharma (1997), in der ein Katamaran so entworfen wurde, daß unter Ausnutzung der Reflexion im schmalen Kanal und der besonderen Ausbreitungseigenschaften von Wellen im flachen Wasser bei einer überkritischen Geschwindigkeit die Wellenbildung vollständig unterdrückt und damit der Wellenwiderstand auf null gebracht werden konnte.

Wiederum ohne ein Schiff oder eine Oberflächenstörung einzubeziehen, haben Yoon und Liu (1989) die Boussinesq-Gleichungen erweitert, um die Wechselwirkung zwischen Strömung und Wellen berücksichtigen zu können. Die Strömungsgeschwindigkeit muß hier viel kleiner sein als die Gruppengeschwindigkeit der Wellen. Q. Chen et. al. (1998) haben die Gleichungen von Nwogu (1993) erweitert, um noch stärkere Strömungen berücksichtigen zu können. Dingemans (1997) gibt schließlich einen ausführlichen Überblick über die verschiedenen Flachwasserapproximationen vom Boussinesq-Typ.

Die vorliegende Arbeit setzt sich nun nicht zum Ziel, einen weiteren Satz von Gleichungen vom Boussinesq-Typ herzuleiten. Vielmehr wurde ein numerisches Verfahren

entwickelt, mit dem praktische Problemstellungen im Zusammenhang mit der Wellenausbreitung im flachen Wasser behandelt werden können. Das daraus entstehende Programm ermöglicht es letztendlich, die Wellenausbreitung eines oder mehrerer Schiffe bei Fahrt über einem unebenen Boden mit beliebiger Topographie zu berechnen. Die Gleichungen werden auf einem kartesischen Gitter mit einem Finite-Differenzen-Schema diskretisiert. Das Programm ist so konzipiert, daß sich damit beliebige, hyperbolische Differentialgleichungssysteme mit drei Zustandsvariablen numerisch lösen lassen. Darüber hinaus kann die Anzahl der Zustandsvariablen ebenfalls mit geringem Aufwand erhöht werden. Zur Modellierung der Schiffswirkung werden verschiedene Verfahren implementiert.

Mit dem entwickelten Computerprogramm wird in einem weiteren Schritt untersucht, für welche Problemstellungen welche Boussinesq-Gleichungen anwendbar sind und wo ihre Grenzen liegen. Ziel der Anstrengungen ist es, ein gesichertes numerisches Verfahren zu erhalten, mit dem die Wellenausbreitung im Wasser begrenzter Tiefe zuverlässig berechnet und damit auch prognostiziert werden kann. Ein solches Verfahren kann gegenüber Modellversuchen flexibel eingesetzt werden und führt zu erheblicher Kosten- und Zeitersparnis. Zudem lassen sich Details der Strömung untersuchen, die sich nicht oder nur mit erheblichem Aufwand messen lassen. Auch können Fälle untersucht werden, für die wegen ihrer Dimension ein entsprechender Versuchsaufbau unmöglich ist.

Zuletzt werden einige Möglichkeiten aufgezeigt, wie der Anwendungsbereich der Boussinesq-Gleichungen zukünftig erweitert und die Genauigkeit der Berechnungen verbessert werden kann.

## 2 Mathematische Beschreibung der Flachwasserströmung

### 2.1 Koordinatensystem

In dieser Arbeit wird grundsätzlich ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem verwendet, dessen  $x$ -Achse in Fahrtrichtung des Schiffs und damit gegen die Anströmung zeigt. Die  $y$ -Achse zeigt nach Backbord, die  $z$ -Achse vertikal nach oben. Entsprechend zeigen die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  in  $x$ -Richtung,  $v$  in  $y$ -Richtung und  $w$  in  $z$ -Richtung.

Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in der Höhe der ungestörten Wasseroberfläche. Die horizontale Position des Ursprungs ist frei. In einigen Fällen wird das Koordinatensystem mit der Schiffsgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung mitbewegt (Relativkoordinatensystem); es wird dann besonders darauf hingewiesen.

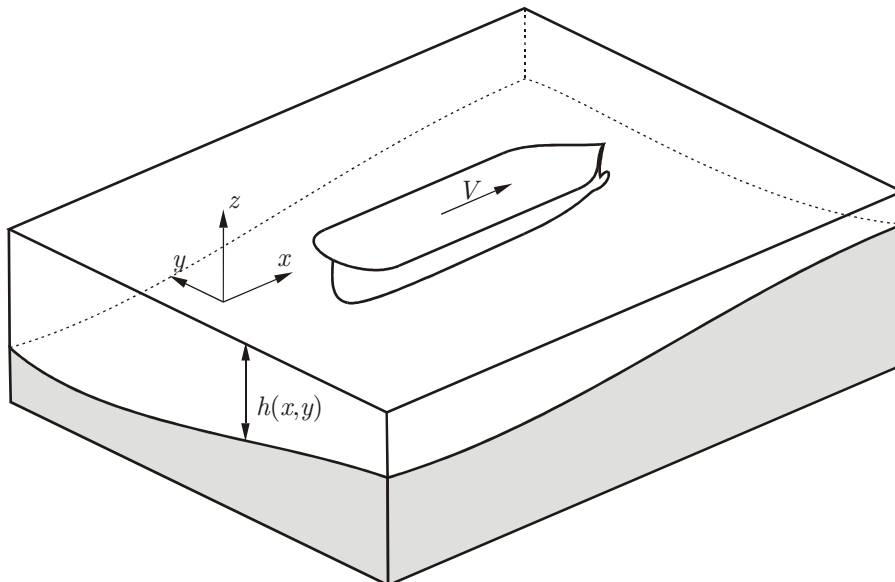


Abb. 2.1 Skizze des untersuchten Strömungsgebiets mit dem verwendeten Koordinatensystem

## 2.2 Differentialgleichungen zur Beschreibung des Strömungsfelds

Die umfassendste Beschreibung eines gegebenen Strömungsgebiets erfolgt durch die Navier-Stokes-Gleichungen. Sie beschreiben die Massen-, Impuls- und Energieerhaltung in einer Strömung einschließlich viskoser Effekte und Wärmeleitung.

Wegen der geringen dynamischen Viskosität des Wassers tritt innerhalb der hier untersuchten Gebiete keine nennenswerte Wellendämpfung auf. Bei der Untersuchung der Wellenausbreitung kann die Reibung innerhalb des Wassers deshalb vernachlässigt werden. Ebenso hat die Oberflächenspannung keine Auswirkung auf die dominierenden langen Wellen. Schließlich kann die Temperatur im gesamten Strömungsgebiet als konstant angesehen werden. Unter Vernachlässigung der Reibung und Wärmeleitung erhält man die Euler-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ (\rho \mathbf{v})_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{v}) + \nabla p + \mathbf{F} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

Hierin sind

$\mathbf{v} = [u, v, w]^T$  der dreidimensionale Geschwindigkeitsvektor,

$\nabla = [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}]^T$  der kartesische Differentialoperator,

$\rho$  die Dichte des Wassers und

$p$  der Druck.

$\mathbf{F}$  ist der Vektor der äußeren Volumenkräfte; wenn nur die Erdbeschleunigung  $g$  wirkt, wird  $\mathbf{F} = [0, 0, g]^T$ .

Bei der Berechnung der Wellenausbreitung im Wasser können neben der Reibung und der Wärmeleitung weitere Effekte ohne Inkaufnahme großer Fehler vernachlässigt und so die Gleichungen wesentlich vereinfacht werden. Die Dichte und Temperatur des Wassers können als konstant angesehen werden. Dies gilt auch in Ästuargebieten, in denen sich das binnenländische Süßwasser mit dem Meerwasser vermischt. Durch Dichte und Temperaturunterschiede hervorgerufene Konvektionsströme sind im Vergleich zu den Tide- und Gefälleströmen des mündenden Flusses vernachlässigbar klein und haben keine Auswirkung auf die Wellenausbreitung. Wenn als einzige äußere Kraft die Schwerkraft wirkt, vereinfachen sich die Euler-Gleichungen zur Massenerhaltung

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0\tag{2.2}$$

und Impulserhaltung

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla(gz) = 0\tag{2.3}$$



## 2.3 Anfangs- und Randbedingungen

Da es sich hierbei um ein gemischtes Anfangs- und Randwertproblem handelt, müssen neben den Gleichungen zur Beschreibung des Strömungsfeldes auch die Anfangs- und Randbedingungen definiert werden.

Auf eine spezielle Betrachtung der Anfangsbedingung kann verzichtet werden, wenn sich für jeden Anfangszustand genau ein stationärer Strömungszustand einstellt und nur dieser asymptotische Zustand von Interesse ist. Im Gegensatz dazu ist der Anfangszustand bei instationären Berechnungen von großer Bedeutung. Da der Anfangszustand mit seinen zeitlichen und räumlichen Ableitungen aber selbst die Differentialgleichungen erfüllen muß und der Zustand des gesamten Strömungsgebiets in der Regel im Vorhinein nicht bekannt ist, wird die vollkommene Ruhe als triviale Lösung angenommen.

Die Randbedingungen können hingegen zu jedem Zeitpunkt genau definiert werden. Feste Wände, dazu zählen z. B. der Schiffsrumpf und der Gewässerboden, werden nicht durchströmt. Eine reibungsfreie Strömung verläuft immer tangential zur Wandfläche, also

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_w = 0 \quad (2.4)$$

mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}_w$  auf der Wandfläche. Wird die Wassertiefe durch eine Funktion  $h(x, y)$  beschrieben, ist der Normalenvektor am Boden

$$\mathbf{n}_b = [h_x, h_y, 1]^T \quad (2.5)$$

und die Randbedingung am Boden wird zu

$$w_b = -u_b h_x - v_b h_y. \quad (2.6)$$

Der Index „b“ kennzeichnet Größen am Boden, z. B.  $u_b = u|_{z=-h}$ .

Wenn keine brechenden Wellen auftreten, kann die freie Wasseroberfläche durch die analytische Funktion  $z = \zeta(t, x, y)$  beschrieben werden. Der Normalenvektor  $\mathbf{n}_f$  auf der freien Oberfläche wird dann zu

$$\mathbf{n}_f = [-\zeta_x, -\zeta_y, 1]^T \quad (2.7)$$

und damit läßt sich die kinematische Randbedingung an der freien Oberfläche als

$$w_f = \zeta_t + u_f \zeta_x + v_f \zeta_y \quad (2.8)$$

schreiben. Die dynamische Randbedingung kann aus der Bernoulli-Gleichung abgeleitet werden. Unter der Annahme, daß das Wasser unendlich weit entfernt in Ruhe ist, gilt entlang einer Stromlinie in stationärer Strömung

$$\frac{\rho}{2}(u_f^2 + v_f^2 + w_f^2) + \rho g \zeta = p_{\text{Luft}} . \quad (2.9)$$

Der Index „f“ kennzeichnet Größen an der freien Oberfläche, z. B.  $u_f = u|_{z=\zeta}$ .

## 2.4 Beschreibung durch ein Strömungspotential

Ein ganz anderer Ansatz ist die Beschreibung einer reibungs- und rotationsfreien Strömung durch eine skalare Potentialfunktion  $\phi(t, x, y, z)$ , deren räumliche Ableitung das vektorielle Geschwindigkeitsfeld ist:

$$\nabla \phi = \mathbf{v} . \quad (2.10)$$

Die Potentialfunktion  $\phi$  muß die Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.11)$$

erfüllen, damit die Massenerhaltung gewährleistet ist. Ein wesentlicher Vorteil dieser Methode ist die Reduktion der vektoriellen Beschreibung der Strömung durch drei Geschwindigkeitskomponenten auf eine Skalarfunktion. In der Regel ist die Potentialfunktion  $\phi$ , die ein Strömungsgebiet beschreibt, eine lineare Überlagerung von vielen Potentialfunktionen  $\phi_i$ , die jeweils einzeln die Laplace-Gleichung erfüllen müssen. So läßt sich beispielsweise eine Parallelströmung mit der Geschwindigkeit  $U$  in  $x$ -Richtung durch das Potential  $\phi = Ux$  beschreiben. Eine Punktquelle der Ergiebigkeit  $q$  am Ort  $\boldsymbol{\xi}$  wird durch  $\phi(\mathbf{x}) = qG(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$  beschrieben, mit der Green-Funktion  $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}$ . Der Quellort selbst darf nicht im Strömungsfeld liegen, da das Potential hier singulär ist.

Es gelten auch hier die im vorigen Abschnitt genannten Randbedingungen. Eine feste Wand wird nicht durchströmt, also

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n}_w = 0 . \quad (2.12)$$

Am Gewässerboden gilt somit

$$\nabla \phi \cdot [h_x, h_y, 1]^T = 0 . \quad (2.13)$$

An der freien Oberfläche gelten die kinematische Randbedingung

$$\nabla \phi \cdot [-\zeta_x, -\zeta_y, 1]^T = \zeta_t \quad (2.14)$$

und die dynamische Randbedingung

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + g\zeta = \frac{p_{\text{Luft}}}{\rho} . \quad (2.15)$$

Numerische Verfahren, die auf der Potentialtheorie basieren, wurden seit Mitte des 20. Jhs. entwickelt. Für einfache Fälle kann sogar eine analytische Lösung gefunden werden. Für die Berechnung der Schiffsumströmung und der damit verbundenen Wellenbildung stehen viele kommerzielle numerische Verfahren (z. B. Shipflow, Kelvin, Rapid, vShallo, Unopam) zur Verfügung. Bei Verwendung von Wirbelquellen kann zudem auch die Auftriebskraft eines schräg angeströmten Körpers berechnet werden. Für einfache Problemstellungen, d. h. bis etwa 8000 Quellen, ist die potentialtheoretische Beschreibung numerisch sehr einfach handhabbar, allerdings wächst der Lösungsaufwand mit der dritten Potenz der unbekannten Quellen. Damit ist die Potentialtheorie für die Berechnung großer Rechengebiete kaum einsetzbar.

## 2.5 Flachwassergleichungen vom Boussinesq-Typ

Ein möglicher Weg, die Beschreibung der Wellenausbreitung weiter zu vereinfachen, ist die Anwendung der Flachwassergleichungen vom Boussinesq-Typ. Die grundlegende Idee hierbei ist es, das Strömungsgebiet in vertikaler Richtung analytisch zu behandeln, so daß die Beschreibung, um eine Dimension reduziert werden und in einer horizontalen Ebene erfolgen kann. Das so erhaltene zweidimensionale Strömungsproblem wird dann numerisch behandelt. Zunächst soll eine mögliche Herleitung der Gleichungen vom Boussinesq-Typ vorgestellt werden. Danach werden verschiedene Approximationen diskutiert.

Die Wassertiefe  $h(x,y)$  wird als im Raum veränderlich, stetig differenzierbar und zeitlich konstant angenommen. Die freie Wasseroberfläche soll ebenfalls durch eine stetig differenzierbare Funktion  $z=\zeta(t,x,y)$  darstellbar sein. Die Temperatur und Dichte des Wassers werden als konstant angenommen. Die Strömung sei reibungs- und rotationsfrei.

Ausgehend von der Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung)

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (2.16)$$

und der Impulserhaltung

$$u_t + uu_x + vv_y + ww_z + p_x = 0 \quad (2.17)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z + p_y = 0 \quad (2.18)$$

$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z + g + p_z = 0 \quad (2.19)$$

und unter Voraussetzung der Rotationsfreiheit

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_z = w_y \\ w_x = u_z \\ v_x = u_y \end{cases} \quad (2.20)$$

kann eine vertikale Integration der Kontinuitätsgleichung (2.16) erfolgen:

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\zeta} (u_x + v_y + w_z) dz \\ &= \int_{-h}^{\zeta} (u_x + v_y) dz + w_f - w_b \\ &= \int_{-h}^{\zeta} (u_x + v_y) dz + \zeta_t + u_f \zeta_x + u_b h_x + v_f \zeta_y + v_b h_y = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Es werden jetzt zwei vertikal über die Wassertiefe gemittelte horizontale Geschwindigkeitskomponenten

$$\bar{u} = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} u(x, y, z, t) dz \quad (2.22)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{h + \zeta} \int_{-h}^{\zeta} v(x, y, z, t) dz \quad (2.23)$$

eingeführt. Mit

$$\begin{aligned} [(h + \zeta) \bar{u}]_x &= \int_{-h}^{\zeta} u_x dz + u_f \zeta_x + u_b h_x \\ [(h + \zeta) \bar{v}]_y &= \int_{-h}^{\zeta} v_y dz + v_f \zeta_y + v_b h_y \end{aligned} \quad (2.24)$$

ergibt sich schließlich eine vertikal gemittelte Kontinuitätsgleichung

$$\zeta_t + [(h + \zeta) \bar{u}]_x + [(h + \zeta) \bar{v}]_y = 0. \quad (2.25)$$

Diese erfüllt implizit die Randbedingungen an der freien Oberfläche und am Boden und setzt nur die Rotationsfreiheit voraus. Eine gesonderte Berechnung der freien Oberfläche, die in anderen numerischen Verfahren einen großen Aufwand darstellt, entfällt hier somit. Die Massenerhaltung wird durch die vertikal gemittelten horizontalen Geschwindigkeitskomponenten exakt beschrieben.

Die vertikale Integration der Impulsgleichungen ist etwas aufwendiger. Zunächst ergibt sich aus der Integration von (2.19)

$$\int_z^{\zeta} (w_t + uw_x + vw_y + ww_z + g + p_z) dz = 0 \quad (2.26)$$

und nach Integration des Druckterms

$$\int_z^\zeta (w_t + uw_x + vw_y + ww_z) dz + g(\zeta - z) + p_f - p = 0 \quad (2.27)$$

Damit erhält man unter Ausnutzung der Rotationsfreiheit (2.20) eine Darstellung für den Druck  $p$ :

$$\begin{aligned} p &= p_f + g(\zeta - z) + \int_z^\zeta (w_t + uw_x + vw_y + ww_z) dz \\ &= p_f + g(\zeta - z) + \int_z^\zeta (w_t + uu_z + vv_z + ww_z) dz \\ &= p_f + g(\zeta - z) + \frac{1}{2}(u_f^2 - u^2) + \frac{1}{2}(v_f^2 - v^2) + \frac{1}{2}(w_f^2 - w^2) + \int_z^\zeta w_t dz \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die vertikale Integration von (2.17)

$$\int_{-h}^\zeta (u_t + uu_x + vu_y + wu_z + p_x) dz = 0 \quad (2.29)$$

ergibt mit Einsetzen von (2.28)

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^\zeta \{ u_t + uu_x + vu_y + wu_z \\ &\quad + [p_f + g(\zeta - z) + \frac{1}{2}(u_f^2 - u^2) + \frac{1}{2}(v_f^2 - v^2) + \frac{1}{2}(w_f^2 - w^2) + \int_z^\zeta w_t dz] \} dz = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

und nach Differenzierung des Druckterms:

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^\zeta \{ u_t + uu_x + vu_y + wu_z + p_{fx} + g\zeta_x \\ &\quad + (u_f u_{fx} - uu_x) + (v_f v_{fx} - vv_x) + (w_f w_{fx} - ww_x) + [\int_z^\zeta w_{tx} dz] + \zeta_x w_{ft} \} dz = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Zur Vereinfachung wird das Symbol  $H$  für die lokale Wasserhöhe eingeführt:

$$H(x, y, t) = \zeta(x, y, t) + h(x, y)$$

Zuerst können alle Funktionen, die von  $z$  unabhängig sind, integriert werden:

$$\begin{aligned} &\int_{-h}^\zeta \{ u_t + uu_x + vu_y + wu_z - uu_x - ww_x + [\int_z^\zeta w_{tx} dz] \} dz \\ &\quad + H[p_{fx} + g\zeta_x + \zeta_x w_{ft} + u_f u_{fx} + v_f v_{fx} + w_f w_{fx}] = 0 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Rotationsfreiheit ergibt sich

$$\int_{-h}^\zeta \{ u_t + [\int_z^\zeta w_{tx} dz] \} dz + H[p_{fx} + g\zeta_x + \zeta_x w_{ft} + u_f u_{fx} + v_f v_{fx} + w_f w_{fx}] = 0 \quad (2.32)$$

und schließlich

$$u_{ft} + u_f u_{fx} + v_f v_{fx} + g \zeta_x + \zeta_x w_{ft} + w_f w_{fx} = -p_{fx}. \quad (2.33)$$

Jetzt kann die kinematische Randbedingung an der freien Oberfläche (2.8) zur Vereinfachung genutzt werden. Mit

$$\begin{aligned} w_f &= \zeta_t + u_f \zeta_x + v_f \zeta_y \\ w_{fx} &= \zeta_{tx} + u_{fx} \zeta_x + u_f \zeta_{xx} + v_{fx} \zeta_y + v_f \zeta_{xy} \\ w_{fy} &= \zeta_{ty} + u_{fy} \zeta_x + u_f \zeta_{xy} + v_{fy} \zeta_y + v_f \zeta_{yy} \\ w_{ft} &= \zeta_{tt} + u_{ft} \zeta_x + u_f \zeta_{tx} + v_{ft} \zeta_y + v_f \zeta_{ty} \end{aligned}$$

wird aus (2.33)

$$\begin{aligned} u_{ft} + u_f u_{fx} + v_f v_{fx} + g \zeta_x + \zeta_x (\zeta_{tt} + u_{ft} \zeta_x + u_f \zeta_{tx} + v_{ft} \zeta_y + v_f \zeta_{ty}) \\ + (\zeta_t + u_f \zeta_x + v_f \zeta_y) (\zeta_{tx} + u_{fx} \zeta_x + u_f \zeta_{xx} + v_{fx} \zeta_y + v_f \zeta_{xy}) = -p_{fx} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die vertikal integrierte Impulsgleichung (2.34) erfüllt implizit die Randbedingungen am Boden und an der freien Oberfläche und setzt nur die Rotationsfreiheit voraus; weitere einschränkende Annahmen wurden nicht getroffen. In gleicher Weise kann die zweite Impulsgleichung vertikal integriert werden:

$$\begin{aligned} v_{ft} + u_f u_{fy} + v_f v_{fy} + g \zeta_y + \zeta_y (\zeta_{tt} + u_{ft} \zeta_x + u_f \zeta_{tx} + v_{ft} \zeta_y + v_f \zeta_{ty}) \\ + (\zeta_t + u_f \zeta_x + v_f \zeta_y) (\zeta_{ty} + u_{fy} \zeta_x + u_f \zeta_{xy} + v_{fy} \zeta_y + v_f \zeta_{yy}) = -p_{fy} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Es besteht jetzt die Aufgabe, die unbekannten Geschwindigkeiten an der freien Oberfläche  $u_f$  und  $v_f$  durch die vertikal gemittelten Geschwindigkeiten  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  auszudrücken, damit die Kontinuitätsgleichung (2.25) und die Impulsgleichungen (2.34 und 2.35) zusammen gelöst werden können.

Es ist

$$\begin{aligned} \int_z^\zeta w_z dz &= w_f - w \\ w &= w_f - \int_z^\zeta w_z dz = w_f + \int_z^\zeta u_x + v_y dz \end{aligned}$$

und mit (2.20) wird daraus

$$\begin{aligned} u_z = w_x &= \left[ w_f + \int_z^\zeta u_x + v_y dz \right]_x \\ &= \left[ \zeta_t + u_f \zeta_x + v_f \zeta_y + \int_z^\zeta (u_x + v_y) dz \right]_x \end{aligned}$$

$$= \zeta_{tx} + 2 u_{fx} \zeta_x + u_f \zeta_{xx} + v_f \zeta_{xy} + v_{fx} \zeta_y + v_{fy} \zeta_x + \int_z^\zeta (u_{xx} + v_{xy}) dz$$

Jetzt kann  $u$  durch eine Taylorreihe dargestellt werden

$$u(z) = u_f + (z - \zeta) u_z|_{z=\zeta} + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2 u_{zz}|_{z=\zeta} + \dots$$

$$u_z|_{z=\zeta} = \zeta_{tx} + 2 u_{fx} \zeta_x + u_f \zeta_{xx} + v_f \zeta_{xy} + v_{fx} \zeta_y + v_{fy} \zeta_x$$

$$u_{zz}|_{z=\zeta} = u_{fxx} + v_{fxy}$$

Dies ist der Kernpunkt der Boussinesq-Approximation. Indem die Taylorreihe nach der zweiten Ordnung abgebrochen wird, wird grundsätzlich eine parabolische vertikale Geschwindigkeitsverteilung erzwungen. Die Taylorentwicklung kann bei diesem Ansatz auch nicht über die zweite Ordnung hinaus geführt werden, weil alle  $\frac{\partial^{(n)} u}{(\partial z)^n} \equiv 0, n \geq 3$ .

Die horizontale Geschwindigkeit  $u(z)$  läßt sich also als Funktion der Geschwindigkeit am Boden  $u_f$ , der Wellenerhebung  $\zeta$  und deren räumlichen und zeitlichen Ableitungen ausdrücken:

$$u(z) = u_f + (z - \zeta) [\zeta_{tx} + 2 u_{fx} \zeta_x + u_f \zeta_{xx} + v_f \zeta_{xy} + v_{fx} \zeta_y + v_{fy} \zeta_x] + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2 [u_{fxx} + v_{fxy}]$$

Diese kann über die lokale Wassertiefe integriert werden,

$$\begin{aligned} H \bar{u} &= \int_{-h}^\zeta \{ u_f + (z - \zeta) [\zeta_{tx} + 2 u_{fx} \zeta_x + u_f \zeta_{xx} + v_f \zeta_{xy} + v_{fx} \zeta_y + v_{fy} \zeta_x] + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2 [u_{fxx} + v_{fxy}] \} dz \\ &= H u_f + \frac{1}{2} H^2 [\zeta_{tx} + 2 u_{fx} \zeta_x + u_f \zeta_{xx} + v_f \zeta_{xy} + v_{fx} \zeta_y + v_{fy} \zeta_x] + \frac{1}{6} H^3 [u_{fxx} + v_{fxy}] \end{aligned}$$

und es ergibt sich schließlich

$$\bar{u} = u_f + \frac{1}{2} H [\zeta_{tx} + 2 u_{fx} \zeta_x + u_f \zeta_{xx} + v_f \zeta_{xy} + v_{fx} \zeta_y + v_{fy} \zeta_x] + \frac{1}{6} H^2 [u_{fxx} + v_{fxy}] \quad (2.36)$$

und analog

$$\bar{v} = v_f + \frac{1}{2} H [\zeta_{ty} + 2 v_{fy} \zeta_y + v_f \zeta_{yy} + u_f \zeta_{xy} + u_{fx} \zeta_y + u_{fy} \zeta_x] + \frac{1}{6} H^2 [u_{fxy} + v_{fyy}]. \quad (2.37)$$

Die Gleichungen (2.36) und (2.37) können jetzt in die Kontinuitätsgleichung (2.25) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} & \zeta_t + \left( H \left\{ u_f + \frac{1}{2} H [\zeta_{tx} + 2u_{fx} \zeta_x + u_f \zeta_{xx} + v_f \zeta_{xy} + v_{fx} \zeta_y + v_{fy} \zeta_x] + \frac{1}{6} H^2 [u_{fxx} + v_{fxy}] \right\} \right)_x \\ & + \left( H \left\{ v_f + \frac{1}{2} H [\zeta_{ty} + 2v_{fy} \zeta_y + v_f \zeta_{yy} + u_f \zeta_{xy} + u_{fx} \zeta_y + u_{fy} \zeta_x] + \frac{1}{6} H^2 [u_{fxy} + v_{fyy}] \right\} \right)_y = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

So ergibt sich mit (2.38), (2.34) und (2.35) ein Differentialgleichungssystem, das die Strömung in einem idealen Fluid beschreibt. Die einzige Einschränkung liegt in der nur unvollständigen Darstellung der vertikal gemittelten Geschwindigkeit durch die Geschwindigkeit an der freien Oberfläche in der Kontinuitätsgleichung. Diese wurde durch den Tayloransatz bis zur zweiten Ordnung approximiert. Die daraus resultierende parabolische vertikale Geschwindigkeitsverteilung der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  unterscheidet sich von der tanh-Verteilung der linearen Tiefwasserwellen, was für zunehmend kürzere Wellen zu einer zunehmend falschen Phasengeschwindigkeit führt. Als charakteristisches Maß für die Wellenlänge wird im Rahmen dieser Betrachtung nicht die absolute Wellenlänge  $\lambda$ , sondern das Verhältnis von Wassertiefe zu Wellenlänge  $\frac{h}{2\pi\lambda} = kh$  verwendet. In diesem Sinne ist mit kurzen Wellen immer ein großes  $kh$  gemeint. Es wurden vielfache Anstrengungen unternommen, um das Dispersionsverhalten der Boussinesq-Gleichungen für größere  $kh$  zu verbessern.

Die vorgestellten Gleichungen (2.38), (2.34) und (2.35) sind in dieser Form nicht ohne erheblichen numerischen Aufwand lösbar, da sie viele nichtlineare Terme und außerdem zeitliche Ableitungen zweiter Ordnung enthalten. Die Gleichungen müssen deshalb noch weiter vereinfacht werden.

## 2.6 Vereinfachte Approximation

Es sollen nun im folgenden verschiedene Approximationen vorgestellt werden, die sich numerisch leichter lösen lassen und darüber hinaus Korrekturterme zur Verbesserung des Dispersionsverhaltens beinhalten. Es sollen dabei nicht alle Herleitungsschritte wiedergegeben werden; dazu wird auf die angegebenen Quellen verwiesen.

Zur Vereinfachung der Gleichungen muß ein Kriterium herangezogen werden, anhand dessen entschieden werden kann, welche Terme vernachlässigt werden. Ein geeignetes Kriterium ist die Größenordnung der Terme, die sich nach einer multiskalaren Dimensionsuntersuchung ergibt. Zur Untersuchung der Größenordnung werden zwei Kennzahlen herangezogen:

$$\mu = \frac{2\pi h}{\lambda} = kh$$

und



$$\epsilon = \frac{\zeta_A}{h}$$

Die Boussinesq-Approximation geht davon aus, daß die charakteristische Wellenamplitude viel kleiner als die Wassertiefe ist, d. h.  $\zeta_A \ll h$ , und daß die charakteristische Wellenlänge viel größer als die Wassertiefe ist, d. h.  $\lambda \gg h$ , also

$$O(\mu^2) = O(\epsilon) \leq 1.$$

Für diese beiden Kennzahlen können folgende Zahlenbereiche genannt werden:

$$\epsilon = \begin{cases} 0 \dots 0.02 & \text{lineare Wellen} \\ 0.02 \dots 0.39 & \text{nichtlineare Wellen} \\ > 0.39 & \text{brechende Wellen} \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} \infty \dots \pi & \text{Tiefwasser} \\ \pi \dots \frac{\pi}{2} & \text{Übergangsbereich} \\ \frac{\pi}{2} \dots 0 & \text{Flachwasser} \end{cases}$$

Beide Kennzahlen können auch in der Ursell-Zahl zusammengefaßt werden:

$$Ur = \frac{\epsilon}{\mu^2} = \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{Airy-Gleichungen} \\ \approx 1 & \text{Boussinesq-Gleichungen} \\ \rightarrow 0 & \text{lineare Wellentheorie} \end{cases}$$

Es können dann alle Größen dimensionslos (gekennzeichnet mit ' ) gemacht werden:

$$\zeta' = \frac{\zeta}{\zeta_A} = \frac{\zeta}{\epsilon h}$$

$$u' = \frac{u}{\epsilon \sqrt{gh}}$$

$$v' = \frac{v}{\epsilon \sqrt{gh}}$$

Indem die Gleichungen nur bis zur Ordnung  $O(\epsilon \mu^2, \mu^4)$  approximiert werden, ergibt sich das Differentialgleichungssystem

$$\zeta'_t + \nabla \cdot [(\epsilon \zeta' + h') \bar{\mathbf{u}}'] = 0$$

$$\bar{\mathbf{u}}'_t + \epsilon (\bar{\mathbf{u}}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}' + \nabla \zeta' + \nabla p'_f - \mu^2 \frac{h'}{2} \nabla [\nabla \cdot (h' \bar{\mathbf{u}}'_t)] + \mu^2 \frac{h'^2}{6} \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}'_t) + O(\epsilon \mu^2, \mu^4) = 0$$

oder in dimensionsbehafteter Form in Komponentenschreibweise

$$\zeta'_t + (\zeta'_x + h'_x) \bar{u}' + (\zeta'_y + h'_y) \bar{v}' + (\zeta'_z + h'_z) \bar{w}' = 0 \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}_t + \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y + g \zeta_x \\ & - \frac{h}{2} [h_{xx} \bar{u}_t + 2h_x \bar{u}_{tx} + h \bar{u}_{txx} + h_{xy} \bar{v}_t + h_y \bar{v}_{tx} + h_x \bar{v}_{ty} + h \bar{v}_{txy}] \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$+ \frac{h^2}{6} [\bar{u}_{txx} + \bar{v}_{txy}] = -\frac{p_x}{\rho}$$

$$\begin{aligned} & \bar{v}_t + \bar{u} \bar{v}_x + \bar{v} \bar{v}_y + g \zeta_y \\ & - \frac{h}{2} [h_{xy} \bar{u}_t + h_y \bar{u}_{tx} + h_x \bar{u}_{ty} + h \bar{u}_{txy} + h_{yy} \bar{v}_t + 2h_y \bar{v}_{ty} + h \bar{v}_{tyy}] \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$+ \frac{h^2}{6} [\bar{u}_{txy} + \bar{v}_{tyy}] = -\frac{p_y}{\rho}$$

Die Gleichungen (2.39) bis (2.41) werden auch als klassische Boussinesq-Gleichungen bezeichnet. Sie beinhalten nur noch wenige nichtlineare Terme, die numerisch sehr gut approximiert werden können. Eine ausführliche Herleitung geben Dingemans (1997) und Jiang (2001).

## 2.7 Verbesserung des Dispersionsverhaltens

Bei der Berechnung der Wellenausbreitung in flachem Wasser veränderlicher Tiefe mit den klassischen Boussinesq-Gleichungen treten für kurze Wellen nicht vernachlässigbare Fehler in der Phasengeschwindigkeit auf. Im Zusammenhang mit Schiffswellen wird dies besonders bei unterkritischer Fahrt deutlich und wird in der Ausbreitung der Quellwellen und im Öffnungswinkel der divergenten Wellen sichtbar (s. a. Havelock, 1908).

Es wurden deshalb viele Anstrengungen unternommen, um das Dispersionsverhalten zu verbessern. Es sollen hier nur zwei Gleichungstypen vorgestellt werden, die stellvertretend für die diversen Arbeiten stehen. Madsen et al. (1991) geben Boussinesq-Gleichungen mit verbessertem Dispersionsverhalten, die sich aus der Formulierung von Abott et al. (1984) ableiten. Die Strömung wird hier nicht durch die gemittelten Geschwindigkeiten  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  sondern durch die integrierten Geschwindigkeiten

$$P(x, y, t) = \int_{-h}^{\zeta} u(x, y, z, t) dz$$

und

$$Q(x, y, t) = \int_{-h}^{\zeta} v(x, y, z, t) dz$$

sowie die Wellenerhebung  $S(x, y, t) = \zeta(x, y, t)$  beschrieben:

$$S_t + P_x + Q_y = 0$$

$$P_t + \left( \frac{P^2}{d} \right)_x + \left( \frac{PQ}{d} \right)_y + g d S_x - \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 (P_{txx} + Q_{txy}) - Bgh^3 (S_{xxx} + S_{xyy}) = 0$$

$$Q_t + \left( \frac{Q^2}{d} \right)_y + \left( \frac{PQ}{d} \right)_x + g d S_y - \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 (P_{txy} + Q_{tyy}) - Bgh^3 (S_{xxy} + S_{yyy}) = 0$$

Nach Substitution von

$$S = \zeta$$

$$d = h + \zeta$$

$$P = \bar{u}(h + \zeta)$$

$$Q = \bar{v}(h + \zeta)$$

lassen sich die Gleichungen mit den in den vorigen Abschnitten verwendeten gemittelten Geschwindigkeiten schreiben:

$$\zeta_t + \bar{u}(h + \zeta)_x + \bar{v}(h + \zeta)_y + (\bar{u}_x + \bar{v}_y)(h + \zeta) = 0$$

$$[\bar{u}(h + \zeta)]_t + [\bar{u}^2(h + \zeta)]_x + [\bar{u}\bar{v}(h + \zeta)]_y + g(h + \zeta)\zeta_x$$

$$- \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 ([\bar{u}(h + \zeta)]_{txx} + [\bar{v}(h + \zeta)]_{txy}) - Bgh^3 (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) = 0$$

$$[\bar{v}(h + \zeta)]_t + [\bar{v}^2(h + \zeta)]_y + [\bar{u}\bar{v}(h + \zeta)]_x + g(h + \zeta)\zeta_y$$

$$- \left( B + \frac{1}{3} \right) h^2 ([\bar{u}(h + \zeta)]_{txy} + [\bar{v}(h + \zeta)]_{tyy}) - Bgh^3 (\zeta_{xxy} + \zeta_{yyy}) = 0$$

Der grundsätzliche Ansatz zur Verbesserung des Dispersionsverhaltens besteht in dem Hinzufügen zusätzlicher Terme  $\psi_1$  und  $\psi_2$  zu den Impulsgleichungen:

$$P_t + \left( \frac{P^2}{d} \right)_x + \left( \frac{PQ}{d} \right)_y + g d S_x + \psi_1 = 0$$

$$Q_t + \left( \frac{Q^2}{d} \right)_y + \left( \frac{PQ}{d} \right)_x + g d S_y + \psi_2 = 0$$

Diese Terme können zunächst beliebig gewählt werden. Sie enthalten einen oder mehrere Parameter (hier  $B$ ), mit denen der Fehler der Phasengeschwindigkeit für kurze Wellen minimiert werden kann. Der Wert sollte so gewählt werden, daß der integrierte Fehler im Bereich der untersuchten Wellenlängen ein Minimum erreicht; typische Werte liegen zwischen 0 und  $\frac{1}{15}$ . Eine detaillierte Diskussion des Dispersionsverhaltens geben Madsen et al. (1991). In einer zweiten Arbeit von Madsen et al. (1992) wird das Dispersionsverhalten unter Berücksichtigung veränderlicher Wassertiefe diskutiert. 1995 veröffentlichten Schäffer und Madsen noch einmal erweiterte Boussinesq-Gleichungen mit zwei Parametern zur Verbesserung des Dispersionsverhaltens.

Eine grundsätzlich alternative Form zur Verbesserung des Dispersionsverhaltens gibt Nwogu (1993). Er beschreibt die Strömung nicht anhand vertikal gemittelter Geschwindigkeiten, sondern mit den lokalen horizontalen Geschwindigkeitskomponenten in einer bestimmten Ebene  $z=z_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \zeta_t + \nabla \cdot [(h+\zeta) \mathbf{u}_\alpha] + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{z_\alpha}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \left( z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)] \right] &= 0 \\ \mathbf{u}_t + \nabla \zeta + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + \left\{ \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + z_\alpha \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)] \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Durch die Wahl einer geeigneten Ebene  $z_\alpha$  kann der relative Fehler in der Phasengeschwindigkeit für einen bestimmten Wellenlängenbereich minimiert werden.

## 2.8 Beschreibung im Relativkoordinatensystem

Zur Untersuchung der Ausbreitung von schiffserzeugten Wellen ist es vorteilhaft, die Gleichungen in einem schiffsfesten Koordinatensystem zu beschreiben, um das Rechengebiet möglichst klein halten zu können. Eine passende Formulierung gibt Jiang (2001):

$$\zeta_t - V \zeta_x + (\zeta_x + h_x) \bar{u} + (\zeta + h)(\bar{u}_x + \bar{v}_y) + (\zeta_y + h_y) \bar{v} = 0 \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} &\bar{u}_t - V \bar{u}_x + \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y + g \zeta_x \\ &- \frac{h}{2} [h_{xx} \bar{u}_t + 2h_x \bar{u}_{tx} + h \bar{u}_{txx} + h_{xy} \bar{v}_t + h_y \bar{v}_{tx} + h_x \bar{v}_{ty} + h \bar{v}_{txy} \\ &- V(h_{xx} \bar{u}_x + 2h_x \bar{u}_{xx} + h \bar{u}_{xxx} + h_{xy} \bar{v}_x + h_y \bar{v}_{xx} + h_x \bar{v}_{xy} + h \bar{v}_{xxy})] \\ &+ \frac{h^2}{6} (1 - 6 C_{BQ}) [\bar{u}_{txx} + \bar{v}_{txy} - V(\bar{u}_{xxx} + \bar{v}_{xxy})] \\ &+ gh^2 C_{BQ} (\zeta_{xxx} + \zeta_{xyy}) = -\frac{p_x}{\rho} \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} &\bar{v}_t - V \bar{v}_x + \bar{u} \bar{v}_x + \bar{v} \bar{v}_y + g \zeta_y \\ &- \frac{h}{2} [h_{xy} \bar{u}_t + h_y \bar{u}_{tx} + h_x \bar{u}_{ty} + h \bar{u}_{txy} + h_{yy} \bar{v}_t + 2h_y \bar{v}_{ty} + h \bar{v}_{tyy} \\ &- V(h_{xy} \bar{u}_x + h_x \bar{u}_{xy} + h_y \bar{u}_{xx} + h \bar{u}_{xxy} + h_{yy} \bar{v}_x + 2h_y \bar{v}_{xy} + h \bar{v}_{xyy})] \\ &+ \frac{h^2}{6} (1 - 6 C_{BQ}) [\bar{u}_{txy} + \bar{v}_{tyy} - V(\bar{u}_{xxy} + \bar{v}_{xyy})] \\ &+ gh^2 C_{BQ} (\zeta_{xxy} + \zeta_{yyy}) = -\frac{p_y}{\rho} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Diese Gleichungen gelten entweder in einem bewegten Koordinatensystem, das sich mit der Geschwindigkeit  $V$  in  $x$ -Richtung bewegt, wobei die Wassertiefe in  $x$ -Richtung unveränderlich sein muß, oder in einem erdfesten Koordinatensystem ( $V = 0$ ) mit beliebiger Bodentopographie. Sie enthalten ebenfalls eine Dispersionskorrektur, die mit dem Parameter  $C_{BQ}$  gesteuert wird. Typische Werte für  $C_{BQ}$  liegen zwischen 0 und  $-0.0572$ .

## 2.9 Einbeziehen der Strömungswirkung

Grundströmungen, wie sie in Flüssen und Küstengebieten (Tideströmung) vorherrschen, haben zwei Auswirkungen. Sie beeinflussen die Ausbreitung von Wellen und können bei entsprechender Bodentopographie selbst zur Wellenbildung führen. Die bisher vorgestellten Gleichungen können keine Effekte, die durch Grundströmungen hervorgerufen werden, unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Bodentopographie erfassen.

Im folgenden sollen drei in dieser Hinsicht erweiterte Boussinesq-Gleichungen vorgestellt werden. Auf eine ausführliche Diskussion der Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet. Diese findet sich in den Quellen selbst und zusammengefaßt bei Dingemans (1997). Simulationsergebnisse aus der Anwendung dieser Gleichungen werden weiter unten in Abschnitt 5.1.5 beschrieben.

Yoon und Liu (1989) und Dingemans (1997) führen folgende neue Skalierungsfaktoren ein:

$$\varepsilon = \frac{\zeta^w}{h}, \quad \mu = \frac{h^2}{\lambda^2}, \quad \nu = \frac{|U|}{\sqrt{gh}} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\zeta^c}{h}$$

wobei  $U$  die Geschwindigkeit der Strömung,  $\zeta^w$  die Wasserspiegelauslenkung aufgrund der Wellen und  $\zeta^c$  die Wasserspiegelauslenkung aufgrund der Strömung bezeichnen. Es ist zu beachten, daß der Parameter  $\mu$  hier anders definiert wird als bei Jiang (s. Kapitel 2.6). Entsprechend wird für den Wellenanteil  $O(\varepsilon) = O(\mu) \ll 1$  verlangt. Die Größenordnung der Strömung soll zwischen  $\varepsilon$  und 1 liegen, etwa  $\nu^2 \approx \mu \approx \varepsilon$ .

Mit diesen Annahmen ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$\gamma \zeta_t + \nu [(h + \gamma \zeta) \bar{u}]_x + [(h + \gamma \zeta) \bar{v}]_y = 0 \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & \nu [(h + \gamma \zeta) \bar{u}]_t + \nu \left( [(h + \gamma \zeta) \bar{u} \bar{u}]_x + [(h + \gamma \zeta) \bar{u} \bar{v}]_y \right) + \frac{\gamma}{\nu} (h + \gamma \zeta) \zeta_x \\ & - \frac{1}{2} \mu \left( h^2 [(hu_f)_x + (hv_f)_y] - \frac{h}{3} (u_{fx} + v_{fy}) \right)_t + O(\mu \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned}
 & \nu[(h+\gamma\zeta)v]_t + \nu\left([(h+\gamma\zeta)\bar{u}\bar{v}]_x + [(h+\gamma\zeta)\bar{v}\bar{v}]_y\right) + \frac{\gamma}{\nu}(h+\gamma\zeta)\zeta_y \\
 & - \frac{1}{2}\mu\left(h^2[(hu_f)_x + (hv_f)_y] - \frac{h}{3}(u_{fx} + v_{fy})\right)_t + O(\mu\epsilon) = 0
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= u_f - \frac{1}{6}\mu \frac{1}{h+\gamma\zeta} \left[ \left( (h+\gamma\zeta)^3 u_f \right)_{xx} + \left( (h+\gamma\zeta)^3 v_f \right)_{xy} \right] + O(\gamma\mu) \\
 \bar{v} &= v_f - \frac{1}{6}\mu \frac{1}{h+\gamma\zeta} \left[ \left( (h+\gamma\zeta)^3 u_f \right)_{xy} + \left( (h+\gamma\zeta)^3 v_f \right)_{yy} \right] + O(\gamma\mu)
 \end{aligned}$$

Damit ist dann aber

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_f + O(\mu, \mu\gamma)$$

und die Gleichungen (2.46) und (2.47) vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned}
 & \nu[(h+\gamma\zeta)\bar{u}]_t + \nu\left([(h+\gamma\zeta)\bar{u}\bar{u}]_x + [(h+\gamma\zeta)\bar{u}\bar{v}]_y\right) + \frac{\gamma}{\nu}(h+\gamma\zeta)\zeta_x \\
 & - \frac{1}{2}\mu\left(h^2[(h\bar{u})_x + (h\bar{v})_y] - \frac{h}{3}(\bar{u}_x + \bar{v}_y)\right)_t + O(\mu\epsilon, \mu^2) = 0
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
 & \nu[(h+\gamma\zeta)v]_t + \nu\left([(h+\gamma\zeta)\bar{u}\bar{v}]_x + [(h+\gamma\zeta)\bar{v}\bar{v}]_y\right) + \frac{\gamma}{\nu}(h+\gamma\zeta)\zeta_y \\
 & - \frac{1}{2}\mu\left(h^2[(h\bar{u})_x + (h\bar{v})_y] - \frac{h}{3}(\bar{u}_x + \bar{v}_y)\right)_t + O(\mu\epsilon, \mu^2) = 0
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Chen (1997) stellt folgende Gleichungen zur Berücksichtigung einer Grundströmung vor, hier in der dimensionsloser Form geschrieben:

$$\zeta_t + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) + \delta\zeta \nabla \cdot \mathbf{u} + \nu \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = 0 \tag{2.50}$$

$$\mathbf{u}_t + \nu(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \zeta + \mu^2 [\Lambda_0 + \nu \Lambda_1 + \delta(\Lambda_2 + \nu \Lambda_3) + \delta^2(\Lambda_4 + \nu \Lambda_5)] = O(\epsilon\mu^2, \mu^4) \tag{2.51}$$

mit:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_0 &= h\Gamma_t \\
 \Lambda_1 &= (\mathbf{u} \cdot \nabla)(h\Gamma) \\
 \Lambda_2 &= -\zeta \{ \Gamma_t + \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u}_t)] \} \\
 \Lambda_3 &= -\zeta (\mathbf{u} \cdot \nabla) \{ \Gamma + \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u})] \} \\
 \Lambda_4 &= -\frac{1}{3}\zeta^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_t) \\
 \Lambda_5 &= -\frac{1}{3}\zeta^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})] \\
 \Gamma &= \frac{h}{6} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1}{2} \nabla [\nabla \cdot (h\mathbf{u})]
 \end{aligned}$$

Für eine starke zweidimensionale Strömung über unebenem Boden mit  $\nu = O(1)$ ,  $\delta = O(1)$  und

$$\delta = \epsilon$$

$$\nu u = u^c + u^w$$

ergeben sich in dimensionsbehafteter Form:

$$\zeta_t + h_x u + h_x u_x + \zeta u_x + u \zeta_x = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \frac{1}{2} h_{xx} (h - \zeta) \right] \bar{u}_t - h_x (h - \zeta) \bar{u}_{tx} - \frac{1}{3} (h + \zeta) (h - \zeta) \bar{u}_{txx} \\ & - \frac{1}{2} \left[ (h + \zeta) h_{xxx} + h_{xx} \right] \bar{u} + \left[ 1 - h_x - \frac{3}{2} (h + \zeta) \right] \bar{u} u_x \\ & - \frac{1}{3} \left[ h + h_x (4h + 5\zeta) \right] \bar{u} \bar{u}_{xx} - \frac{1}{3} (h + \zeta)^2 \bar{u} \bar{u}_{xxx} = 0 \end{aligned}$$

Weiter gibt Chen (1998) Gleichungen mit verbesserten Dispersionseigenschaften, abgeleitet von der Formulierung von Nwogu:

$$\begin{aligned} & \zeta_t + \nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha) + \delta \zeta \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nu \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \zeta \\ & + \mu^2 (\Pi_{\alpha 0}^{II} + \nu \Pi_{\alpha 1}^{II} + \delta \Pi_{\alpha 2}^{II} + \delta^2 \Pi_{\alpha 3}^{II} + \delta^3 \Pi_{\alpha 4}^{II}) = O(\epsilon \mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_\alpha + \nu (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha + \nabla \zeta \\ & + \mu^2 [\Lambda_{\alpha 0}^{II} + \nu \Lambda_{\alpha 1}^{II} + \delta (\Lambda_{\alpha 2}^{II} + \nu \Lambda_{\alpha 3}^{II}) + \delta^2 (\Lambda_{\alpha 4}^{II} + \nu \Lambda_{\alpha 5}^{II})] = O(\epsilon \mu^2, \mu^4) \end{aligned} \quad (2.53)$$

mit

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha^I &= \frac{z_\alpha^2}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + z_\alpha \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)] & \Lambda_{\alpha 0}^I &= \Gamma_{\alpha t}^I \\ \Lambda_{\alpha 1}^I &= (\bar{\mathbf{u}}_\alpha \cdot \nabla) \Gamma_{\alpha t}^I \\ \Pi_{\alpha 0}^{II} &= \Pi_{\alpha 0}^I + \nabla \cdot \left\{ \beta_2 \nabla [h^2 \nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)] - \beta_1 h^2 \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)] \right\} & \Lambda_{\alpha 2}^I &= -\zeta \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_{\alpha t})] \\ & + \nabla \cdot \left\{ \beta_2 \nabla (h^2 \zeta_t) - \beta_1 h^2 \nabla \zeta_t \right\} & \Lambda_{\alpha 3}^I &= -\zeta (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \nabla [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)] \\ \Pi_{\alpha 1}^{II} &= \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla [\beta_2 \nabla \cdot (h^2 \nabla \zeta) - \beta_1 h^2 \nabla^2 \zeta] & \Lambda_{\alpha 4}^I &= -\frac{1}{2} \zeta^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}) \\ \Pi_{\alpha 2}^{II} &= \Pi_{\alpha 1}^I + \zeta \nabla \cdot [\beta_2 \nabla (h^2 \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) - \beta_1 h^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)] & \Lambda_{\alpha 5}^I &= -\frac{1}{2} \zeta^2 (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)] \\ \Pi_{\alpha 3}^{II} &= \Pi_{\alpha 2}^I \\ \Pi_{\alpha 4}^{II} &= \Pi_{\alpha 3}^I \\ \Pi_{\alpha 0}^I &= \nabla \cdot h \Gamma_\alpha^I - \nabla \cdot \left\{ \frac{h^3}{6} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) - \frac{h^2}{2} \nabla (\nabla \cdot h \mathbf{u}_\alpha) \right\} \\ \Pi_{\alpha 1}^I &= \zeta \nabla \Gamma_\alpha^I \\ \Pi_{\alpha 2}^I &= \frac{-\zeta^2}{2} \nabla \cdot [\nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha))] \\ \Pi_{\alpha 3}^I &= \frac{-\zeta^3}{6} \nabla \cdot [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\alpha 0}^{II} &= I_{\alpha t}^I - \gamma_1 h^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha t}) + \gamma_2 h \nabla[\nabla \cdot (h \mathbf{u}_{\alpha t})] \\
 &\quad - \gamma_1 h^2 \nabla(\nabla \cdot \nabla \zeta) + \gamma_2 h \nabla[\nabla \cdot (h \nabla \zeta)] \\
 \Lambda_{\alpha 1}^{II} &= (\bar{\mathbf{u}}_{\alpha} \cdot \nabla) I_{\alpha t}^I - \gamma_1 h^2 \nabla(\mathbf{u}_{\alpha t} \cdot \nabla)[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha})] \\
 &\quad - \gamma_2 h \nabla(\mathbf{u}_{\alpha t} \cdot \nabla)[\nabla(\nabla \cdot (h \mathbf{u}_{\alpha}))] \\
 \Lambda_{\alpha 2}^{II} &= \Lambda_{\alpha 2}^I \\
 \Lambda_{\alpha 3}^{II} &= \Lambda_{\alpha 3}^I \\
 \Lambda_{\alpha 4}^{II} &= \Lambda_{\alpha 4}^I \\
 \Lambda_{\alpha 5}^{II} &= \Lambda_{\alpha 5}^I
 \end{aligned}$$

Als letzte alternative Form der Boussinesq-Gleichungen mit Berücksichtigung der Strömungswirkung werden die Gleichungen von Zou untersucht:

$$\zeta_t + \nabla \cdot [(h + \zeta) \mathbf{u}] = 0 \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \zeta &= h \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \left\{ \frac{1}{2} \nabla[\nabla \cdot (h \mathbf{u})] - \frac{h}{6} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} \\
 &\quad + \zeta \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \left\{ \frac{1}{2} \nabla[\nabla \cdot (h \mathbf{u})] + \frac{h}{6} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{3} \zeta^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})]
 \end{aligned} \quad (2.55)$$

Eine zweidimensionale Strömung über einem unebenen Boden läßt sich dann in Komponentenschreibweise wie folgt beschreiben:

$$\zeta_t + (h + \zeta) u_x + h_x u + u \zeta_x = 0 \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned}
 &u_t + uu_x + g \zeta_x \\
 &- h \left[ \frac{1}{2} h_{xx} u_t + h_x u_{tx} + \frac{1}{3} h u_{txx} + u \left( \frac{1}{2} h_{xxx} u + \frac{3}{2} h_{xx} u_x + \frac{4}{3} h_x u_{xx} + \frac{1}{3} h u_{xxx} \right) \right] \\
 &- \zeta \left[ \frac{1}{2} h_{xx} u_t + h_x u_{tx} + \frac{2}{3} h u_{txx} + u \left( \frac{1}{2} h_{xxx} u + \frac{3}{2} h_{xx} u_x + \frac{5}{3} h_x u_{xx} + \frac{2}{3} h u_{xxx} \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{3} \zeta^2 (u_{txx} + uu_{xxx}) = 0
 \end{aligned} \quad (2.57)$$

## 2.10 Bodenreibung

Die Wellendämpfung aufgrund der inneren Reibung im Wasser ist wegen der sehr geringen dynamischen Viskosität des Wasser in den hier untersuchten Fällen vernachlässigbar, vgl. Miles (1976). Dagegen spielt die Bodenreibung, vor allem bei vorhandener Grundströmung im flachen Wasser, eine bedeutende Rolle. Ohne auf die Vereinfachung der reibungsfreien Strömung zu verzichten, kann die Bodenreibung als dissipativer Term in der Impulsgleichung erfaßt werden.



Abbildung 2.2 zeigt ein infinitesimal kleines Flüssigkeitselement mit einer rechteckigen Grundfläche. Die untere Grenzfläche ist der Gewässerboden, die obere Grenzfläche ist die freie Oberfläche. Die Grundfläche ist  $dx$  lang und  $dy$  breit, die Höhe beträgt  $h+\zeta$ . Zwischen dem Wasser und dem Boden wirken Schubspannungen, die integriert als Reibungskräfte  $F_{Rx}$  und  $F_{Ry}$  auf den Boden wirken:

$$F_{Rx} = \bar{u}_t \rho \, dx \, dy (h+\zeta)$$

$$F_{Ry} = \bar{v}_t \rho \, dx \, dy (h+\zeta)$$

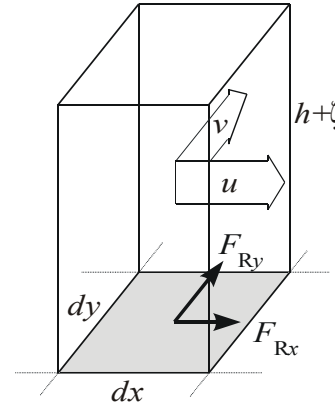


Abb. 2.2 Flüssigkeitselement mit Reibungskräften am Boden

Für die Formulierung der Reibungskräfte gibt es verschiedene Ansätze (z. B. de Chézy, Darcy-Weisbach oder Gauckler-Manning-Strickler), die sich letztendlich alle auf die Reibungskraft an einer längsangeströmten Platte nach Baker (1915) zurückführen lassen:

$$F_{Rx} = c_{Fb} \frac{\rho}{2} \bar{u} |\bar{u}| \, dx \, dy$$

$$F_{Ry} = c_{Fb} \frac{\rho}{2} \bar{v} |\bar{v}| \, dx \, dy$$

Der Reibungsbeiwert  $c_{Fb}$  ist noch zu bestimmen. Für hydraulisch oder technisch glatte Oberflächen gibt es zahlreiche Untersuchungen zum Reibungsbeiwert. Dazu zählen die theoretischen Überlegungen von Blasius (1908), Prandtl oder von Kármán (1921) und eine große Zahl von experimentellen Untersuchungen, die schließlich zu einer Reihe von Reibungslinien geführt haben, die den Reibungsbeiwert als Funktion der Reynoldszahl darstellen. Aberle (2000) zeigt aber, daß für natürliche Gewässerböden eine allgemeine Formulierung eines Reibungsbeiwertes, z. B. als Funktion der Korngröße, schwierig ist.

Bei der Anwendung dieses Reibungsansatzes sind einige Punkte zu bedenken: Das vertikale Geschwindigkeitsprofil bleibt wegen des analytischen Ansatzes stets parabolisch. Die Reibungseffekte, die in der Realität zu einer Veränderung der Grenzschichtströmung führen, können nur in ihrer integralen Wirkung erfaßt werden. Es wäre denkbar, die vertikale Geschwindigkeitsverteilung statt durch eine Taylorreihe durch eine andere geeignete Funktion zu approximieren, was zu einem völlig neuen Satz von Flachwassergleichungen führen würde. Neben den horizontalen Reibungskräften wirkt bei unebenem Boden auch eine vertikale Kraft auf die Strömung, die in den Boussinesq-Gleichungen nicht berücksichtigt wird. Die von der vertikalen Kraftkomponente hervorgerufene Beschleunigung müßte in der Impulsgleichung (2.19) berücksichtigt werden, was ebenfalls einen völlig neuen Satz von Boussinesq-Gleichungen zur Folge hätte. Zuletzt

bleibt ungeklärt, ob zur Berechnung der Reibungskraft die gemittelten Geschwindigkeiten  $\bar{\mathbf{u}}$  oder die daraus berechneten Geschwindigkeiten am Boden

$$\mathbf{u}_b = \bar{\mathbf{u}} - \frac{h^2}{3} \nabla (\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + \frac{h}{2} \nabla [\nabla \cdot (h \bar{\mathbf{u}})]$$

genauer sind, weil aufgrund der fehlenden Grenzschicht grundsätzlich nicht das Strömungsprofil vorliegt, auf dessen Basis das Reibungsmodell erstellt wurde.

Schließlich ergeben sich mit diesem Reibungsansatz die erweiterten Impulsgleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{u}_t + \dots + \frac{c_F}{2} \frac{\bar{u} |\bar{u}|}{h + \zeta} &= -\frac{p_x}{\rho} \\ \bar{v}_t + \dots + \frac{c_F}{2} \frac{\bar{v} |\bar{v}|}{h + \zeta} &= -\frac{p_y}{\rho} \end{aligned} \quad (2.58)$$

## 2.11 Coriolis-Kraft

Auch wenn die Coriolis-Kraft nur bei Strömungssimulationen sehr ausgedehnter Gebiete, bzw. sehr langer Wellen (Gezeitenwellen) eine Rolle spielt, kann sie leicht durch zwei Terme in den Impulsgleichungen – hier werden beispielhaft die Gleichungen (2.40) und (2.41) erweitert – berücksichtigt werden, vgl. Scarlatos (1996):

$$\begin{aligned} &\bar{u}_t + \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y + g \zeta_x \\ &- \frac{h}{2} [h_{xx} \bar{u}_t + 2h_x \bar{u}_{tx} + h \bar{u}_{txx} + h_{xy} \bar{v}_t + h_y \bar{v}_{tx} + h_x \bar{v}_{ty} + h \bar{v}_{txy}] \\ &+ \frac{h^2}{6} [\bar{u}_{txx} + \bar{v}_{txy}] - f \bar{v} = -\frac{p_x}{\rho} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} &\bar{v}_t + \bar{u} \bar{v}_x + \bar{v} \bar{v}_y + g \zeta_y \\ &- \frac{h}{2} [h_{xy} \bar{u}_t + h_y \bar{u}_{tx} + h_x \bar{u}_{ty} + h \bar{u}_{txy} + h_{yy} \bar{v}_t + 2h_y \bar{v}_{ty} + h \bar{v}_{tyy}] \\ &+ \frac{h^2}{6} [\bar{u}_{txy} + \bar{v}_{tyy}] + f \bar{u} = -\frac{p_y}{\rho} \end{aligned} \quad (2.60)$$

mit

$$f = 2\Omega \sin \phi$$

Hierin sind  $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  die Winkelgeschwindigkeit der Erde und  $\phi$  die geographische Breite.

# 3 Approximation der schiffserzeugten Wellen

Obwohl die Flachwassergleichungen vom Boussinesq-Typ durch den analytischen Ansatz der vertikalen Geschwindigkeitsverteilung nicht in der Lage sind, die Strömung direkt am Rumpf zu berechnen, können sie dennoch dazu verwendet werden, die Ausbreitung der von Schiffen erzeugten Wellen zu simulieren. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Wirkung, die der Schiffsrumpf auf die Strömung hat, zu modellieren. Im folgenden sollen vier Möglichkeiten diskutiert werden.

## 3.1 Druckverteilung

Die Störung durch das Schiff kann als Druckverteilung auf der Wasseroberfläche modelliert werden. Es werden dann die räumlichen Druckableitungen in den Impulsgleichungen (2.43) und (2.44) proportional zum hydrostatischen Druck des ruhenden Schiffs gesetzt:

$$\begin{aligned}p_x(x, y) &= -\rho g T_x(x, y) \\ p_y(x, y) &= -\rho g T_y(x, y)\end{aligned}$$

Dieses Verfahren hat den Nachteil, daß die Schiffsgeometrie nur eingeschränkt berücksichtigt werden kann. So entstehen erhebliche numerische Probleme an senkrechten Seitenwänden oder auch am Spiegelheck, wo die Ableitungen des Tiefgangs unendlich werden. Weiterhin kann ein Bugwulst nicht erfaßt werden. Da der Schiffsrumpf nicht als fester Körper, der nicht durchströmt werden kann, modelliert wird, bilden sich in der Simulation auch unterhalb des Druckfelds, d. h. unterhalb des Schiffskörpers Wellen aus. Die Wellen nahe des Schiffskörpers entsprechen deshalb nicht der Realität.

Trotz dieser Schwierigkeiten können mit der Druckapproximation vor allem für Binnenschiffsformen gute Ergebnisse erzielt werden, s. Henn (1999).

### 3.2 Vereinheitlichte Flachwassertheorie

Die vereinheitlichte Flachwassertheorie von Jiang (2001) teilt das Rechengebiet in zwei Bereiche: das Innen- und Außenfeld. Das Innenfeld bezeichnet das Strömungsgebiet unterhalb des Schiffs, das Außenfeld das umgebende Gebiet. Im Außenfeld werden die bekannten Boussinesq-Gleichungen angewendet. Im Innenfeld unterhalb des Schiffsrumpfs folgt die Wasseroberfläche dem starren Schiffskörper. Die Wellenerhebung ist also immer gleich dem lokalen Tiefgang  $\zeta = -T(x, y, t)$ , wobei hier dynamischer Trimm und Absenkung berücksichtigt werden können. Während die Wellenerhebung  $\zeta$  also bekannt ist, ist jetzt der Druck  $p$  unbekannt und die Gleichungen im Innenfeld werden dann zu:

$$-T_t + VT_x + \nabla \cdot [(h - T) \bar{\mathbf{u}}] = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_t - V \bar{\mathbf{u}}_x + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \nabla \frac{p_s}{\rho} - \frac{h - T}{2} \nabla (\nabla \cdot [h(\bar{\mathbf{u}}_t - V \bar{\mathbf{u}}_x)]) \\ + \frac{-2T^2 + Th + h^2}{6} \nabla [\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}_t - V \bar{\mathbf{u}}_x)] = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

bzw. in Komponenten:

$$-T_t + VT_x + (h - T)(\bar{u}_x + \bar{v}_y) + h_x \bar{u} + h_y \bar{v} = 0 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_t - V \bar{u}_x + \bar{u} \bar{u}_x + \bar{v} \bar{u}_y + \frac{p_x}{\rho} \\ - \frac{h - T}{2} [h_{xx} \bar{u}_t + 2h_x \bar{u}_{tx} + h_{txx} \bar{u} + h_{xy} \bar{v}_t + h_{ytx} \bar{v} + h_x \bar{v}_{ty} + h_{txy} \bar{v}] \\ - V(h_{xx} \bar{u}_x + 2h_x \bar{u}_{xx} + h_{xxx} \bar{u} + h_{xy} \bar{v}_x + h_{yxx} \bar{v} + h_x \bar{v}_{xy} + h_{xxy} \bar{v}) \\ + \frac{-2T^2 + Th + h^2}{6} [\bar{u}_{txx} + \bar{v}_{txy} - V(\bar{u}_{xxx} + \bar{v}_{xxy})] = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_t - V \bar{v}_x + \bar{u} \bar{v}_x + \bar{v} \bar{v}_y + \frac{p_y}{\rho} \\ - \frac{h - T}{2} [h_{xy} \bar{u}_t + h_x \bar{u}_{ty} + h_y \bar{u}_{tx} + h_{txy} \bar{u} + h_{yy} \bar{v}_t + 2h_y \bar{v}_{ty} + h_{tyy} \bar{v}] \\ - V(h_{xy} \bar{u}_x + h_x \bar{u}_{xy} + h_y \bar{u}_{xx} + h_{xxy} \bar{u} + h_{yyx} \bar{v} + 2h_y \bar{v}_{xy} + h_{xyy} \bar{v}) \\ + \frac{-2T^2 + Th + h^2}{6} [\bar{u}_{txy} + \bar{v}_{tyy} - V(\bar{u}_{xxy} + \bar{v}_{xyy})] = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aus der Integration des Drucks kann der Wellenwiderstand berechnet werden:

$$R_W = - \iint_{S_{\text{wett}}} (p \mathbf{n})_x dS$$

Auch die vereinheitlichte Flachwassertheorie ermöglicht es nicht, den für die Wellenbildung entscheidenden Bugwulst zu berücksichtigen.

### 3.3 Schlankkörpertheorie

Die Schlankkörpertheorie erfaßt die Verdrängungswirkung (Massenerhaltung) des Rumpfs, indem der Schiffskörper als Störung in der Strömung modelliert wird, ähnlich der Quell-/Senken-Verteilung in der Potentialtheorie. Das Schiff wird zu einer unendlich dünnen Fläche (Mittschiffsebene) abstrahiert, von der eine Störgeschwindigkeit senkrecht zur Anströmung ausgeht. Im Zusammenhang mit den Flachwassergleichungen erfolgt zusätzlich eine vertikale Integration dieser Störgeschwindigkeiten, so daß die Wirkung des Schiffs durch eine Störgeschwindigkeitsverteilung auf der Mittschiffslinie modelliert wird:

$$\bar{v}\Big|_{y \rightarrow \pm B \frac{(x,t)}{2}} = \mp \frac{1}{2(h + \zeta_{\text{WL}})} \left[ -\zeta_{\text{WL}} (B_t - V B_x + \bar{u}_{\text{WL}} B_x) + h B \bar{u}_{\text{WL}} x - (S_t - V S_x) - (\bar{u}_{\text{WL}} S)_x \right]$$

Diese Geschwindigkeitsverteilung wird im Rechengebiet auf einer Linie zwischen Bug und Heck als Randbedingung vorgegeben. Auf der Mittschiffslinie werden darüber hinaus die Symmetriebedingungen  $u_y = 0$  und  $\zeta_y = 0$  angesetzt.

Es ergibt sich so im Bugbereich eine Quellströmung und im Heckbereich eine Senkenströmung, durch die das anströmende Wasser im gleichen Maße verdrängt wird wie durch den eigentlichen Schiffskörper. Damit kann zwar jede Spantform berücksichtigt werden, so z. B. auch ein Bugwulst, die Form der Spanten selbst hat aber keinen Einfluß auf die Strömung. Die ungenaue Berücksichtigung der Formdetails führt aber gleichzeitig zu einem numerisch robusten Verfahren, weil es mögliche lokale numerische Schwierigkeiten in der rumpfnahen Strömung umgeht, an denen andere Lösungsverfahren scheitern. Als Folge daraus entsprechen die simulierten Wellen direkt am Rumpf in der Regel nicht den tatsächlichen Wellen. Die integrale Verdrängungswirkung wird aber richtig erfaßt. Ausführlichere Darstellungen zur Schlankkörpertheorie finden sich z. B. bei Jiang (2001). Dort wird auch gezeigt, daß sich der Wellenwiderstand für Schiffe mit spitz zulaufendem Heck zum Teil sehr gut berechnen läßt. Für Schiffe mit Spiegelheck gilt dies im allgemeinen nicht.

Als weitere Methode zur Berechnung des Wellenwiderstandes bietet sich die Wellenbildanalyse an, s. Sharma (1963). Diese läßt sich unabhängig von der gewählten Modellierungsmethoden anwenden. Diese Arbeit konzentriert sich aber auf die Wellenbildung und -ausbreitung und die dynamische Schwimmlage von Schiffen, weshalb die Wellenbildanalyse nicht angewendet wurde.

### 3.4 Kopplung mit einer externen Lösung

Die vierte Möglichkeit ist die Übernahme einer externen Lösung für die Schiffsumströmung. Dazu wird ein, vorzugsweise rechteckiges, Gebiet (Innenfeld) um das Schiff herum ausgespart. Das schiffsnahe Innenfeld wird mit einem genaueren, aufwendigeren Verfahren, z. B. einem potentialtheoretischen Paneelverfahren oder einem RANSE-Verfahren berechnet. Die aus dieser Berechnung erhaltenen vertikal gemittelten horizontalen Geschwindigkeitskomponenten und die Wellenerhebung werden dann dem Außenfeld als Randbedingung vorgegeben. Dieser Ansatz berücksichtigt die Schiffsgeometrie am genauesten und wird im Kapitel 4.6 detailliert behandelt.

Obwohl die ersten drei vorgestellten Verfahren Nachteile haben, weshalb sie zur Detailoptimierung der Schiffsform hinsichtlich der Wellenbildung nicht anwendbar sind, zeigt sich, daß die berechneten Schiffswellen in vielen Fällen mit den gemessenen praktisch sehr gut übereinstimmen.

## 4 Numerische Methoden und Implementierung

Eine effiziente numerische Lösung der verschiedenen hier untersuchten partiellen Differentialgleichungen ist die Voraussetzung für deren breite Anwendbarkeit. Die dazu entwickelten Verfahren werden in diesem Kapitel beschrieben. Zur Verbesserung der Lesbarkeit werden im Folgenden bei den vertikal gemittelten Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  die Überstriche weggelassen. Wenn mit  $u$  und  $v$  die lokalen Geschwindigkeitskomponenten im dreidimensionalen Strömungsgebiet gemeint sind, wird darauf explizit hingewiesen.

Die Gesamtlösung erfolgt in zwei Schritten: Zuerst wird das Differentialgleichungssystem mit einem Finite-Differenzen-Schema in ein algebraisches Gleichungssystem überführt, wobei gleichzeitig eine Linearisierung durchgeführt wird. Das sich daraus ergebende lineare Gleichungssystem wird im zweiten Schritt mit bewährten Methoden numerisch gelöst. Das Aufstellen des Gleichungssystems und seine Lösung müssen wegen der Änderung der sog. Koeffizienten für jeden Zeitschritt neu erfolgen.

Um die verschiedenen erweiterten Flachwassergleichungen einfach untersuchen zu können, wurde ein numerisches Verfahren entwickelt, das es schließlich erlaubt, ein instationäres Problem mit drei Zustandsvariablen (hier  $\zeta$ ,  $u$  und  $v$ ), das durch beliebige hyperbolische partielle Differentialgleichungen beschrieben wird, ohne Änderung der Programmstruktur auf einem zweidimensionalen kartesischen Gitter zu lösen. Das Verfahren ist so allgemein gehalten, daß es leicht auf beliebig viele Zustandsvariablen erweitert werden kann. Die Größe des Rechengebiets wird nur durch die verfügbare Hardware beschränkt.

### 4.1 Diskretisierung

Diskretisierung bedeutet, daß die Zustandsvariablen nicht stetig im gesamten Rechengebiet berechnet werden, sondern nur an ausgewählten, endlich vielen diskreten Punk-

ten. Diese Punkte sind die Knotenpunkte eines Gitternetzes, das allgemein als Berechnungsgitter bezeichnet wird. In dieser Arbeit wird ein zweidimensionales kartesisches Berechnungsgitter mit konstanter Gitterweite  $\Delta x$  in  $x$ -Richtung und  $\Delta y$  in  $y$ -Richtung verwendet. An jedem Gitterpunkt werden die drei Differentialgleichungen diskretisiert.

Daneben gibt es auch die Technik der „versetzten Gitter“, bei der sich die Zustandsgrößen nicht an den gleichen Stellen befinden, an denen auch die Gleichungen diskretisiert werden. Dadurch kann die Ordnung der Diskretisierung erhöht werden (Banijamali 1997), allerdings ist die genaue Erfüllung der Randbedingungen schwieriger. Eine Diskretisierung mit einem versetzten Gitter ist erforderlich, wenn die Boussinesq-Gleichungen aus der vereinheitlichten Flachwassertheorie gelöst werden sollen, weil sich sonst aufgrund der Entkopplung von Kontinuitäts- und Impulsgleichungen ein unterbestimmtes Gleichungssystem ergäbe.

Neben der räumlichen erfolgt auch eine zeitliche Diskretisierung; die Lösung des Gleichungssystems geschieht in Zeitschritten mit dem konstanten Intervall  $\Delta t$ .

Die Verwendung eines kartesischen Gitters mit konstanter Gitterweite bringt große Vorteile für die Berechnungsgeschwindigkeit. Schwierigkeiten können sich allerdings an Rändern mit nicht-kartesischer Geometrie, wie z. B. natürlichen Uferbereichen, ergeben. Da die Geometrie des Schiffsrumpfs nicht direkt modelliert wird, entfällt diese Schwierigkeit. Auch ist eine unregelmäßige Bodentopographie kein Problem, weil die lokale Wassertiefe implizit in den Gleichungen enthalten ist und somit keine Randbedingung darstellt. Andere Ansätze, die die Differentialgleichungen mit einer Finite-Elemente-Methode (FEM) lösen, können beliebig geformte Gitterelemente, in der Regel aber Dreiecke, verwenden. Ambrosi (1997) zeigt eine numerische Lösung der herkömmlichen Boussinesq-Gleichungen ohne Dispersionskorrektur mit einem Finite-Elemente-Verfahren und gibt ein Beispiel für die Ausbreitung einer Solitonwelle. Ebenso arbeiten Walkley und Berzins (1999) und Walkley (1999) mit Finite-Elemente-Verfahren. Die Diskretisierung mittels FEM bringt allerdings große Probleme bei den höheren Ableitungen mit sich, die zwangsläufig bei der Einführung dispersionskorrigierender Terme auftreten.

#### 4.1.1 Übergang zur finiten Differenz

Eine beliebige differenzierbare Funktion  $q(\eta)$  kann durch eine Taylor-Entwicklung um einen Punkt  $\eta_0$  dargestellt werden:

$$q(\eta) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\eta - \eta_0)^v}{v!} q^{(v)}(\eta_0) \quad (4.1)$$

Die Funktion  $q$  steht hier stellvertretend für beliebige Zustandsgrößen  $\zeta$ ,  $u$  oder  $v$ ; die Variable  $\eta$  steht für die Koordinaten  $t$ ,  $x$  oder  $y$ . Das Symbol  $q$  kann auch für eine Ab-



leitung der Zustandsgrößen  $\zeta$ ,  $u$  oder  $v$  nach einer anderen unabhängigen Koordinate  $\xi \neq \eta$  stehen, z. B.  $q = u_\xi$ .

Vom Diskretisierungspunkt  $\eta_0$  ausgehend werden die Funktionswerte an den Stellen  $\eta + \Delta\eta$  und  $\eta - \Delta\eta$  mit einem Taylor-Ansatz bis zur 2. Ordnung dargestellt:

$$q(\eta + \Delta\eta) = q(\eta) + \Delta\eta q_\eta + \Delta\eta^2 q_{\eta\eta} + O(3) \quad (4.2)$$

$$q(\eta - \Delta\eta) = q(\eta) - \Delta\eta q_\eta + \Delta\eta^2 q_{\eta\eta} + O(3) \quad (4.3)$$

Aus der Differenz (4.3)–(4.2)

$$q(\eta + \Delta\eta) - q(\eta - \Delta\eta) = 2\Delta\eta q_\eta + O(3)$$

ergibt sich dann eine diskrete Darstellung für die erste Ableitung

$$q_\eta = \frac{q(\eta + \Delta\eta) - q(\eta - \Delta\eta)}{2\Delta\eta} + O(3). \quad (4.4)$$

Diese wird auch als Zentralfdifferenz bezeichnet, da zur Bildung der Ableitung ein Funktionswert rechts ( $\eta + \Delta\eta$ ) und einer links ( $\eta - \Delta\eta$ ) vom Diskretisierungspunkt benötigt wird. Um eine einseitige Ableitung zu erhalten, kann die Taylorentwicklung schon nach der ersten Ordnung abgebrochen werden. Aus

$$q(\eta + \Delta\eta) = q(\eta) + \Delta\eta q_\eta + O(2)$$

wird dann

$$q_\eta = \frac{q(\eta + \Delta\eta) - q(\eta)}{\Delta\eta} + O(2).$$

Es ist zu bemerken, daß die rechtsseitige Ableitung an der Stelle  $\eta$  mit der Zentralfdifferenz bei  $\eta + \frac{1}{2}\Delta\eta$  bis auf den Abbruchfehler identisch ist.

Bei Vernachlässigung aller Terme ab der vierten Ordnung erhält man eine genauere Approximation der Ableitung

$$q_\eta = \frac{-q(\eta + 2\Delta\eta) + 8q(\eta + \Delta\eta) - 8q(\eta - \Delta\eta) + q(\eta - 2\Delta\eta)}{12\Delta\eta}. \quad (4.5)$$

Das folgende Diagramm 4.1 verdeutlicht den Unterschied zwischen beiden Ableitungen. Die gegebene Funktion  $q(\eta) = \sin(10\eta)$  ist mit durchgezogener Linie (—) dargestellt, ihre analytische Ableitung  $q_\eta = 10\cos(10\eta)$  mit gestrichelter Linie (- - -). Erfolgt die Diskretisierung an relativ wenigen Stützstellen, so ergeben sich deutliche Unterschiede für die numerisch angenäherten Ableitungen. Die Quadrate ( $\square$ ) zeigen die Werte für die Approximation bis einschließlich der 3. Ordnung nach (4.5) und die Kreuze (+) entsprechend nach (4.4). Der Genauigkeitsgewinn durch die Berücksichtigung der hö-

heren Ordnung ist deutlich erkennbar. In praktischen Fällen treten keine derart hochfrequenten Schwingungen auf, bzw. die Stützstellen sind enger verteilt, so daß sich dann kein signifikanter Genauigkeitsgewinn durch die Approximation höherer Ordnung ergibt. Die Kreise (o) zeigen die Approximation bis zur 2. Ordnung bei doppelter Dichte der Stützstellen. Damit wird etwa die gleiche Genauigkeit erreicht, wie bei der Approximation bis zur 3. Ordnung. Um den Rechenaufwand zu begrenzen, wird deshalb auf die aufwendigere Approximation bis zur 3. Ordnung verzichtet.

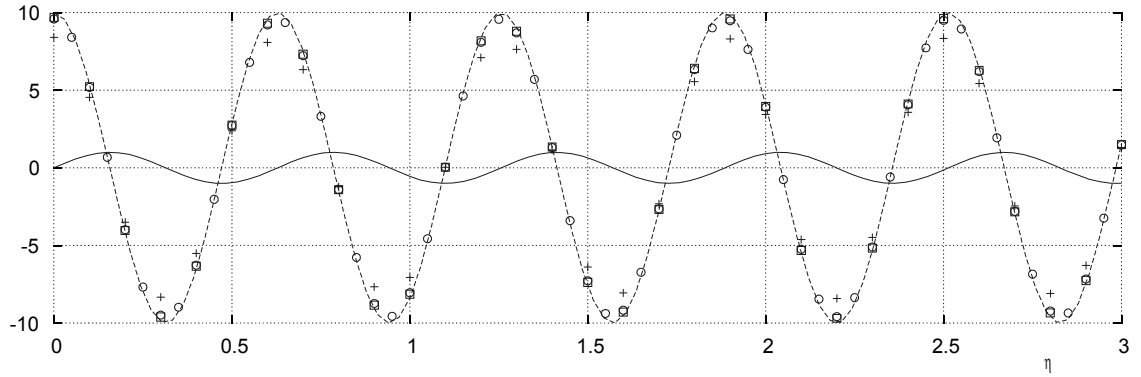


Abb. 4.1 Verschiedene Approximationen der ersten Ableitung

#### 4.1.2 Räumliche Ableitungen

Die räumlichen Ableitungen werden nach dem oben beschriebenen Verfahren bestimmt. Mit den konstanten Gitterweiten  $\Delta x$  in  $x$ -Richtung und  $\Delta y$  in  $y$ -Richtung kann der Ort in Gitterkoordinaten (Gitterindizes)  $i$  und  $j$  angegeben und vereinfacht geschrieben werden:

$$q(x, y) = q(i \Delta x, j \Delta y) = q_{i,j}$$

Zur Bildung der höheren Ableitungen und der einseitigen Ableitungen müssen weitere entsprechende Tayloransätze gemacht werden,

$$q(\eta - 3\Delta\eta) = q(\eta) - q_\eta 3\Delta\eta + \frac{1}{2} q_{\eta\eta} 9\Delta\eta^2 - \frac{1}{6} q_{\eta\eta\eta} 27\Delta\eta^3 + O(4)$$

$$q(\eta - 2\Delta\eta) = q(\eta) - q_\eta 2\Delta\eta + \frac{1}{2} q_{\eta\eta} 4\Delta\eta^2 - \frac{1}{6} q_{\eta\eta\eta} 8\Delta\eta^3 + O(4)$$

$$q(\eta - \Delta\eta) = q(\eta) - q_\eta \Delta\eta + \frac{1}{2} q_{\eta\eta} \Delta\eta^2 - \frac{1}{6} q_{\eta\eta\eta} \Delta\eta^3 + O(4)$$

$$q(\eta + \Delta\eta) = q(\eta) + q_\eta \Delta\eta + \frac{1}{2} q_{\eta\eta} \Delta\eta^2 + \frac{1}{6} q_{\eta\eta\eta} \Delta\eta^3 + O(4)$$

$$q(\eta + 2\Delta\eta) = q(\eta) + q_\eta 2\Delta\eta + \frac{1}{2} q_{\eta\eta} 4\Delta\eta^2 + \frac{1}{6} q_{\eta\eta\eta} 8\Delta\eta^3 + O(4)$$

$$q(\eta+3\Delta\eta)=q(\eta)-q_{\eta}3\Delta\eta+\frac{1}{2}q_{\eta\eta}9\Delta\eta^2+\frac{1}{6}q_{\eta\eta\eta}27\Delta\eta^3+O(4)$$

aus denen sich dann die in den folgenden Tabellen wiedergegebenen numerischen Approximationen der räumlichen Ableitungen ergeben. In Tabelle 4.1 stehen die erste, zweite und dritte Ableitung nach einer Koordinate in zentralen und einseitigen Formen. In Tabelle 4.2 stehen die Ableitungen nach zwei Koordinaten in zentraler und einseitigen Formen. Schließlich sind in Tabelle 4.3 die Ableitungen dritter Ordnung nach zwei Koordinaten in zentraler und einseitigen Formen aufgeführt. Höhere Ableitungen können nach vorgestellten Schema gebildet werden; sie kommen in den hier untersuchten Gleichungen nicht vor.

Tabelle 4.1: Ableitung von  $q$  nach einer Koordinate  $\eta$ 

	$q_{\eta}$	$q_{\eta\eta}$	$q_{\eta\eta\eta}$
linksseitig			$\frac{q_i - 3q_{i-1} + 3q_{i-2} - q_{i-3}}{\Delta\eta^3}$
	$\frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta\eta}$	$\frac{q_i - 2q_{i-1} + q_{i-2}}{\Delta\eta^2}$	$\frac{q_{i+1} - 3q_i + 3q_{i-1} - q_{i-2}}{\Delta\eta^3}$
zentral	$\frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2\Delta\eta}$	$\frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{\Delta\eta^2}$	$\frac{q_{i+2} - 2q_{i+1} + 2q_{i-1} - q_{i-2}}{2\Delta\eta^3}$
rechtsseitig	$\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta\eta}$	$\frac{q_{i+2} - 2q_{i+1} + q_i}{\Delta\eta^2}$	$\frac{q_{i+2} - 3q_{i+1} + 3q_i - q_{i-1}}{\Delta\eta^3}$
			$\frac{q_{i+3} - 3q_{i+2} + 3q_{i+1} - q_i}{\Delta\eta^3}$

Tabelle 4.2: Ableitung von  $q$  nach zwei Koordinaten  $x$  und  $y$ 

$\frac{q_{i+1,j+1} - q_{i,j+1} - q_{i+1,j} + q_{i,j}}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{q_{i+1,j} - q_{i-1,j} - q_{i+1,j-1} + q_{i-1,j-1}}{2\Delta x \Delta y}$	$\frac{q_{i,j+1} - q_{i-1,j+1} - q_{i,j} + q_{i-1,j}}{\Delta x \Delta y}$
$\frac{q_{i+1,j+1} - q_{i,j+1} - q_{i+1,j-1} + q_{i,j-1}}{2\Delta x \Delta y}$	$\frac{q_{i+1,j+1} - q_{i-1,j+1} - q_{i+1,j-1} + q_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$	$\frac{q_{i,j+1} - q_{i-1,j+1} - q_{i,j-1} + q_{i-1,j-1}}{2\Delta x \Delta y}$
$\frac{q_{i+1,j} - q_{i,j} - q_{i+1,j-1} + q_{i,j-1}}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{q_{i+1,j+1} - q_{i-1,j+1} - q_{i+1,j} + q_{i-1,j}}{2\Delta x \Delta y}$	$\frac{q_{i,j+1} - q_{i-1,j+1} - q_{i,j} + q_{i-1,j}}{\Delta x \Delta y}$

Tabelle 4.3: Mehrfache Ableitung von  $q$  nach zwei Koordinaten  $x$  und  $y$ 

$\frac{q_{i+1,j} - 2q_{i,j} + q_{i-1,j} - q_{i+1,j-1} + 2q_{i,j-1} - q_{i-1,j-1}}{\Delta x^2 \Delta y}$
$\frac{q_{i+1,j+1} - 2q_{i,j+1} + q_{i-1,j+1} - q_{i+1,j-1} + 2q_{i,j-1} - q_{i-1,j-1}}{2 \Delta x^2 \Delta y}$
$\frac{q_{i+1,j+1} - 2q_{i,j+1} + q_{i-1,j+1} - q_{i+1,j} + 2q_{i,j} - q_{i-1,j}}{\Delta x^2 \Delta y}$

### 4.1.3 Zeitliche Diskretisierung

Die Simulationen (zeitliche Integrationen) werden mit konstanten Zeitintervallen  $\Delta t$  durchgeführt. Der Zeitschritt (Zeitindex) wird durch den Hochindex  $n$  gekennzeichnet, d. h.  $q^n = q(n \cdot \Delta t)$ .

Für einen beliebigen Zeitpunkt  $t + \alpha \Delta t, 0 \leq \alpha \leq 1$  gilt dann die Approximation erster Ordnung

$$q_t = \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} + O(2).$$

Da es sich hier um ein gemischtes Anfangs- und Randwertproblem handelt, müssen alle Zustandsgrößen  $q$  zu einem Zeitpunkt  $n$  bekannt sein. Zur Berechnung des Zustands zum Zeitpunkt  $n+1$  werden die Gleichungen an einem Zeitpunkt  $n + \alpha$  diskretisiert. Für den Wert  $\alpha = \frac{1}{2}$  ergibt sich das Crank-Nicolson-Schema. Damit erweitert sich jede Zustandsfunktion, die keine zeitliche Ableitung enthält zu

$$q^{n+\alpha} = (1 - \alpha) q^n + \alpha q^{n+1}.$$

In den verwendeten Gleichungen kommen zeitliche Ableitungen nur in der ersten Ordnung vor, weshalb diese Approximation ausreichend genau ist. Das Symbol  $q$  steht hier nicht nur für eine beliebige Zustandsgröße, sondern auch für deren beliebige Ableitungen nach  $\eta$  und/oder  $\xi$ .

## 4.2 Randbedingungen

### 4.2.1 Senkrechte Wände

An senkrechten Wänden, die nicht durchflossen werden, wird die normale Geschwindigkeit zu null gesetzt, die tangentiale Geschwindigkeit wird ohne die fehlende Haftbedingung durch die Feldgleichungen mit einseitigen Ableitungen bestimmt. Verläuft die Wand in  $x$ -Richtung, so werden an diesem Punkt die Kontinuitätsgleichung und die

erste Impulsgleichung einseitig diskretisiert und gelöst, während  $v = 0$  gesetzt wird. Verläuft dagegen die Wand in  $y$ -Richtung, werden die Kontinuitätsgleichung und die zweite Impulsgleichung einseitig diskretisiert und gelöst und dementsprechend  $u = 0$  gesetzt.

#### 4.2.2 Symmetrierand

Das Rechengebiet kann bei  $j = 0$  gespiegelt werden. Diese Technik wird beispielsweise dann genutzt, wenn die Fahrt eines Schiffs auf einer in Fahrtrichtung unveränderlichen Wassertiefe simuliert werden soll. Es gilt dann allgemein:

$$\begin{aligned}\zeta_j &= \zeta_{-j} \\ u_j &= u_{-j} \\ v_j &= -v_{-j}\end{aligned}\tag{4.6}$$

Dementsprechend werden

$$\begin{aligned}\zeta_y|_{j=0} &= 0 \\ u_y|_{j=0} &= 0\end{aligned}$$

#### 4.2.3 Offene Ränder

An offenen Rändern wird eine Sommerfeld-Abstrahlbedingung eingesetzt. Diese erlaubt ein- und ausgehenden Wellen den nahezu ungestörten Durchgang durch den Rand. Die Anwendbarkeit dieser Abstrahlbedingung zusammen mit Boussinesq-Feldgleichungen wurde z. B. von Orlanski (1976) und Jiang (2001) theoretisch untersucht. Sie wurde von vielen Autoren verwendet, u. a. Chen (1997).

Bei unterkritischer Schiffsgeschwindigkeit ist diese am Einströmrand

$$\begin{aligned}\zeta_t + (u - V + \sqrt{g(h + \zeta)})\zeta_x &= 0 \\ u_t + (u - V + \sqrt{g(h + \zeta)})u_x &= 0 \\ v_t + (u - V)v_x &= 0\end{aligned}\tag{4.7}$$

und am Auströmrand

$$\begin{aligned}\zeta_t + (u - V - \sqrt{g(h + \zeta)})\zeta_x &= 0 \\ u_t + (u - V - \sqrt{g(h + \zeta)})u_x &= 0 \\ v_t + (u - V)v_x &= 0\end{aligned}\tag{4.8}$$

Bei überkritischer Schiffsgeschwindigkeit kann keine Welle schneller als das Schiff laufen und damit das Rechengebiet durch den Einströmrand nicht verlassen; es kann die-

selbe Bedingung wie für unterkritische Fahrt verwendet werden. Am Auströmrund wird die Abstrahlbedingung dann

$$\begin{aligned}\zeta_t + (u - V)\zeta_x + (h + \zeta) u_x &= 0 \\ u_t + g\zeta_x + (u - V)u_x &= 0 \\ v_t + (u - V)v_y &= 0\end{aligned}\tag{4.9}$$

$V$  ist hierin die Geschwindigkeit des Relativkoordinatensystems; sie wird bei Berechnungen im erdfesten Koordinatensystem null.

#### 4.2.4 Schlankkörpertheorie

Wenn das Schiff mit Hilfe der Schlankkörpertheorie modelliert wird, werden in der Mittschiffsebene zwischen dem hinteren und dem vorderen Lot die Quergeschwindigkeiten  $v$  an der Backbordseite vorgegeben. Die Quergeschwindigkeiten an der Steuerbordseite haben das entgegengesetzte Vorzeichen. Dies wird bei der Bildung der diskreten Ableitungen berücksichtigt. Alle Ableitungen um die Schiffsmittle in  $y$ -Richtung werden einseitig ausgeführt, so daß die Punkte links und rechts vom Schiff durch eine virtuelle Wand getrennt sind.

### 4.3 Linearisierung

Da lineare Gleichungssysteme besonders effizient gelöst werden können, werden die nichtlinearen Differenzengleichungen linearisiert. Der allgemeine Ausdruck  $q^{n+\alpha} q_\eta^{n+\alpha}$  kann auf verschiedene Weisen linearisiert werden, wenn dieser Teil einer instationären Lösung ist:

1. Aus dem bekannten  $q^n$  wird  $\hat{q}^{n+\alpha}$  extrapoliert und als konstant verwendet  $q^{n+\alpha} q_\eta^{n+\alpha} \approx \hat{q} q_\eta^{n+\alpha}$ ; Vorschläge für eine Extrapolationsvorschrift gibt Jiang (2001).
2. Es erfolgt eine Mittelwertbildung  $q^{n+\alpha} q_\eta^{n+\alpha} \approx \frac{1}{2} \left( q^{n+1} q_\eta^n + q^n q_\eta^{n+1} \right)$ .
3. Im einfachsten Fall ergibt sich  $q^{n+\alpha} q_\eta^{n+\alpha} \approx q^n q_\eta^{n+\alpha}$ .

Bei allen drei Möglichkeiten kann der gleiche Zeitschritt mehrfach iteriert werden, so daß sich der linearisierte Term dem nichtlinearen immer weiter annähert. Es hat sich allerdings gezeigt, daß zwischen den drei Verfahren, auch bei mehrfacher Iteration, im Ergebnis keine signifikanten Änderungen erkennbar sind, so daß im weiteren die 3. Alternative als einfachstes und schnellstes Verfahren verwendet wird. Die Linearisierungsmethode gewinnt dann an Bedeutung, wenn mit relativ großen Zeitschritten simuliert wird ( $\Delta t > \frac{\Delta x}{4V}$ ).

## 4.4 Implementierung

Die Implementierung der numerischen Methoden ist in der Programmiersprache C++ durchgeführt worden. Das entwickelte Programm wurde durch konsequente Verwendung von Klassen so allgemein gehalten, daß ohne Änderungen an der Programmstruktur beliebige lineare (oder linearisierte) Differentialgleichungen auf kartesischen Gittern gelöst werden können.

Der Programmablauf gliedert sich in zwei Hauptabschnitte. Im ersten Abschnitt wird die Simulation vorbereitet. Es werden die Simulationsparameter, die Schiffsgeometrie und die Bodentopographie eingelesen. Weiterhin werden alle dynamischen Objekte erzeugt. Danach erfolgt im zweiten Abschnitt die Simulation, indem für jeden Zeitschritt die Matrix  $\underline{\mathbf{A}}$  und die rechte Seite  $\mathbf{b}$  des linearen Gleichungssystems

$$\underline{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{n+1}=\mathbf{b}$$

besetzt werden und das Gleichungssystem anschließend gelöst wird. Nach dem Lösen kann eine Glättung der Lösung und die Ausgabe der Daten erfolgen.

### 4.4.1 Bodentopographie

Durch die Diskretisierung auf einem kartesischen Gitter kommt es bei natürlichen Bodentopographien in der Regel vor, daß Teile des rechteckigen Berechnungsgebiets über Wasser liegen. Berechnungen werden in dem gegebenen rechteckigen Berechnungsgebiet nur an den Knoten durchgeführt, an denen die Wassertiefe eine vorgegebene Mindestwassertiefe (diese kann auch null sein) überschreitet. Diese Berechnungsknoten werden in eine sog. Karte eingetragen. Die Vorgehensweise soll anhand Abb. 4.2 verdeutlicht werden. Sie zeigt das Rechengebiet mit  $n_i$  Gitterpunkten in der Länge und  $n_j$  Gitterpunkten in der Breite. Die grauen Bereiche liegen oberhalb der Mindestwassertiefe, der weiße Bereich darunter.

Über die Bodentopographie wird das kartesische Gitter gelegt, in dem von links unten anfangend (0,0) und nach oben rechts ( $n_i-1, n_j-1$ ) durchlaufend die Berechnungsknoten von null an beginnend numeriert werden. An Stellen im Netz, an denen kein Berechnungsknoten liegt, d. h. wo kein Wasser ist, wird der Wert  $-1$  eingetragen. Nach diesem Vorgang steht die Anzahl  $K$  der Berechnungsknoten fest. Es wird dann ein dynamisches Feld angelegt, das zu jedem Knoten einen Satz Daten speichert.

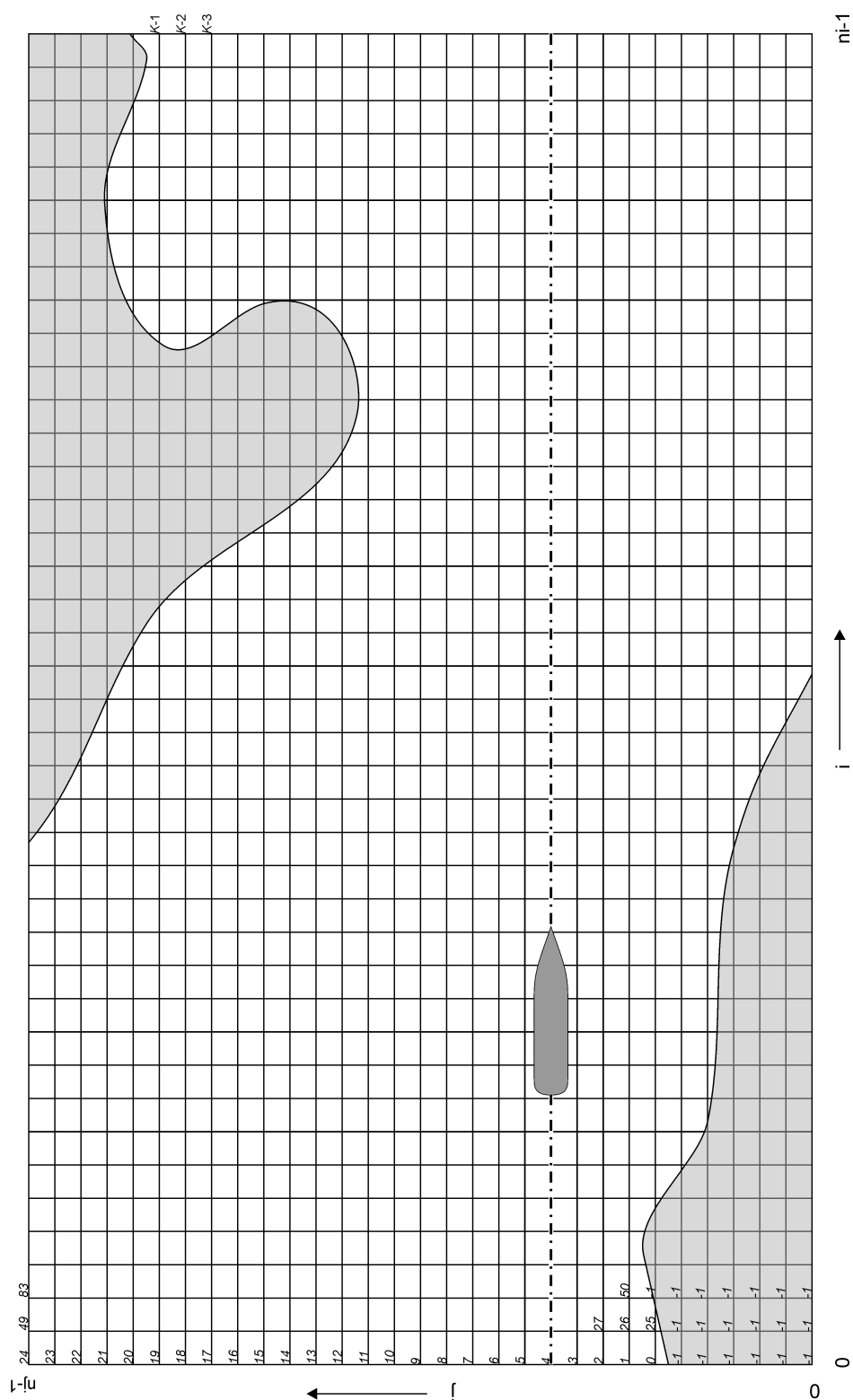


Abb. 4.2 Berechnungsgitter mit teilweise trocken liegenden Gebieten (grau).  
An den Gitterpunkten sind die ersten Knotennummern eingetragen



Dieser Satz besteht aus

- den Gitterkoordinaten  $(i,j)$ , aus denen sich die Raumkoordinaten berechnen lassen
- der Wassertiefe  $h$  mit allen räumlichen Ableitungen der  $(h_x, h_y, h_{xx}, h_{xy}, h_{yy}, h_{xxx}, h_{xxy}, h_{xyy}, h_{yyy})$
- einem Kennzeichen, das die Art der Gleichung bestimmt (Feldgleichung, Sommerfeld-Randbedingung, Schlankkörpertheorie u.a.) und
- fünf Kennzeichen  $F_x, F_y, F_{xy}, F_{xx}$  und  $F_{yy}$  für die Bildung der räumlichen Ableitungen.

Die Zustandsvektoren  $\mathbf{q}_k = [\zeta_k, u_k, v_k]^T$  an jedem Knoten  $k$  werden in einem Supervektor  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{K-1}]^T$  für alle  $K$  Knoten zusammengefaßt. Dieser Vektor  $\mathbf{Q}$  ist gleichzeitig auch der Lösungsvektor des aufzustellenden linearen Gleichungssystems.

#### 4.4.2 Elementare Differenzierungsfunktionen

Wie im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, werden zu jedem Knoten fünf Kennzeichen gespeichert, die angeben, wie die räumlichen Ableitungen durchzuführen sind. Dadurch ist es möglich, mit allgemeinen Programmfunktionen, die hier elementare Differenzierungsfunktionen genannt werden, für einen Knoten  $k$  alle erforderlichen Koeffizienten, die zu einer räumlichen oder zeitlichen Ableitung einer beliebigen Variablen  $q$  gehören, in die zugehörige Zeile des linearen Gleichungssystems einzutragen.

Entsprechend dem Aufbau des Supervektors  $\mathbf{Q}$ , ist die Matrix so organisiert, daß jeweils drei aufeinanderfolgende Zeilen zu einem Knoten gehören. In der ersten Zeile stehen die Koeffizienten für die Kontinuitätsgleichung, in der zweiten und dritten Zeile die für die Impulsgleichungen. Die Kontinuitätsgleichung, die am Knoten  $k$  gelöst wird, steht also in der Zeile  $3k$ , die erste Impulsgleichung in der Zeile  $3k+1$  und die zweite Impulsgleichung in der Zeile  $3k+2$ . Die gleiche Ordnung findet sich in den Spalten der Matrix wieder, entsprechend dem Supervektor  $\mathbf{Q}$ : Die Koeffizienten für  $\zeta$  am Knoten  $k$  stehen in der Spalte  $3k$ , die für  $u$  in der Spalte  $3k+1$  und die für  $v$  in der Spalte  $3k+2$ .

Am Beispiel der ersten Ableitung  $q_x$  soll die Funktionsweise der elementaren Differenzierungsfunktion erläutert werden. Diese bildet den Term

$$\dots + f q_x + \dots = \dots \quad (4.10)$$

in der Matrix und der rechten Seite des Gleichungssystems ab.

Zuerst muß festgelegt werden, an welchem Knoten und in welcher Gleichung die Ableitung einzusetzen ist und für welche Variable  $q$  steht. Dazu werden der Programmfunktion die Knotennummer  $k$ , der Gleichungsindex  $l$  und der Variablenindex  $m$  übergeben. Dabei steht  $l = 0$  für die Kontinuitätsgleichung,  $l = 1$  für die erste Impuls-

gleichung und  $l = 2$  für die zweite Impulsgleichung. Ist  $m = 0$  steht das Symbol  $q$  für die Wellenerhebung  $\zeta$ , ist  $m = 1$  steht  $q$  für die Geschwindigkeit  $u$  und bei  $m = 2$  steht  $q$  für die Geschwindigkeit  $v$ .

Die Zeile  $r$  im Gleichungssystem, die bearbeitet wird, ist dann

$$r = 3k + l.$$

Anhand des Kennzeichens  $F_x$  am Knoten  $k$  ermittelt die Programmfunktion, wie die Ableitung zu bilden ist. Abb. 4.3 zeigt einen Überblick über die möglichen Konstellationen. In der ersten Zeile „ $F_x$ “ finden sich drei Möglichkeiten für die erste Ableitung in  $x$ -Richtung: „ $z$ “ steht für Zentralfdifferenz, bei „ $r$ “ fehlt links ein Knoten und die Ableitung muß rechtsseitig durchgeführt werden. Umgekehrt fehlt bei „ $l$ “ der rechte Knoten, und die Ableitung muß linksseitig durchgeführt werden. Im Programm müssen für jede Ableitung alle möglichen Kennzeichen behandelt werden.

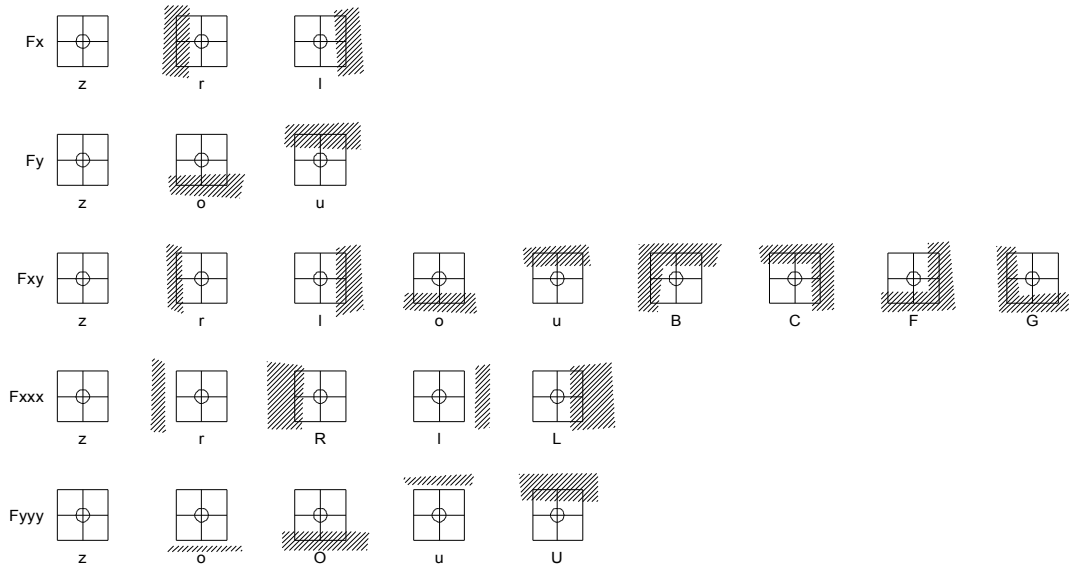


Abb. 4.3 Kennzeichen für die elementaren Differenzierungsfunktionen. Der Kreis markiert den Diskretisierungspunkt, die Schraffur zeigt Wände, hinter denen keine Knoten liegen und deshalb einseitige oder unsymmetrische Ableitungen erforderlich machen.

Für die Ableitung  $q_x$  gibt es drei mögliche Kennzeichen:

1. Bei der Zentralfdifferenz,  $F_x = „z“$ , wird die Approximation von (4.10) zu

$$\dots + f \frac{\alpha(q_{i+1}^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}) + (1-\alpha)(q_{i+1}^n - q_{i-1}^n)}{2\Delta x} + \dots = \dots$$

Alle Terme, die zum letzten Zeitschritt  $n$  gehören, kommen auf die rechte Seite entsprechend

$$\dots + f \frac{+\alpha(q_{i+1,j}^{n+1} - q_{i-1,j}^{n+1})}{2\Delta x} + \dots = -f \frac{(1-\alpha)(q_{i+1,j}^n - q_{i-1,j}^n)}{2\Delta x}$$

und werden dem Vektor der rechten Seite  $\mathbf{b}$  hinzuaddiert:

$$\mathbf{b}[r] := \mathbf{b}[r] - f \frac{(1-\alpha)(q_{i+1}^n - q_{i-1}^n)}{2\Delta x}$$

$q_{i-1,j}^n = \mathbf{Q}^n[3k(i-1,j)+m]$  und  $q_{i+1,j}^n = \mathbf{Q}^n[3k(i+1,j)+m]$  sind Elemente des Supervektors des letzten Zeitschritts.  $k(i,j)$  ist die Knotennummer des Knotens mit den Gitterkoordinaten  $(i,j)$ .

Dann werden die entsprechenden Koeffizienten zu den Matrixelementen hinzuaddiert:

$$\underline{\mathbf{A}}[r, k(i+1, j)] := \underline{\mathbf{A}}[r, k(i+1, j)] + \frac{f\alpha}{2\Delta x}$$

$$\underline{\mathbf{A}}[r, k(i-1, j)] := \underline{\mathbf{A}}[r, k(i-1, j)] - \frac{f\alpha}{2\Delta x}$$

2. Bei der rechtsseitigen Ableitung,  $\text{Fx} = \text{„r“}$ , wird die Approximation von (4.10)

$$\dots + f \frac{\alpha(q_{i+1}^{n+1} - q_i^{n+1}) + (1-\alpha)(q_{i+1}^n - q_i^n)}{\Delta x} + \dots = \dots$$

Entsprechend erfolgt die Addition zur rechten Seite:

$$\mathbf{b}[r] := \mathbf{b}[r] - f \frac{(1-\alpha)(q_{i+1}^n - q_i^n)}{\Delta x}$$

und die Addition zu den Matrixelementen

$$\underline{\mathbf{A}}[r, k(i+1, j)] := \underline{\mathbf{A}}[r, k(i+1, j)] + \frac{f\alpha}{\Delta x}$$

$$\underline{\mathbf{A}}[r, k(i, j)] := \underline{\mathbf{A}}[r, k(i, j)] - \frac{f\alpha}{\Delta x}$$

3. Bei der linksseitigen Ableitung,  $\text{Fx} = \text{„l“}$ , wird die Approximation von (4.10)

$$\dots + f \frac{\alpha(q_i^{n+1} - q_{i-1}^{n+1}) + (1-\alpha)(q_i^n - q_{i-1}^n)}{\Delta x} + \dots = \dots$$

Entsprechend erfolgt die Addition zur rechten Seite:

$$\mathbf{b}[r] := \mathbf{b}[r] - f \frac{(1-\alpha)(q_i^n - q_{i-1}^n)}{\Delta x}$$

und die Addition zu den Matrixelementen

$$\underline{\mathbf{A}}[r, k(i, j)] := \underline{\mathbf{A}}[r, k(i, j)] + \frac{f\alpha}{\Delta x}$$

$$\underline{\mathbf{A}}[r, k(i-1, j)] := \underline{\mathbf{A}}[r, k(i-1, j)] - \frac{f\alpha}{\Delta x}$$

Es gibt so für jede auftretende partielle räumliche Ableitung und ihre mögliche Kombination mit der zeitlichen Ableitung eine elementare Differenzierungsfunktion. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über alle Funktionen und das dabei ausgewertete Kennzeichen. Die elementaren Differenzierungsfunktionen in  $y$ -Richtung müssen dabei zusätzlich noch die Position des Schiffs bei Anwendung der Schlankkörpertheorie berücksichtigen.

$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial xx}$	$\frac{\partial}{\partial xy}$	$\frac{\partial}{\partial yy}$	$\frac{\partial}{\partial xxx}$	$\frac{\partial}{\partial xxy}$	$\frac{\partial}{\partial xyy}$	$\frac{\partial}{\partial yyy}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial}{\partial tx}$	$\frac{\partial}{\partial ty}$	$\frac{\partial}{\partial txx}$	$\frac{\partial}{\partial txy}$	$\frac{\partial}{\partial ty y}$
Fx	Fy	Fx	Fxy	Fy	Fxxx	Fxy	Fxy	Fyyy	–	Fx	Fy	Fx	Fxy	Fy

Zusätzlich gibt es eine weitere elementare Funktion, die den Term

$$\dots + f q + \dots = \dots$$

im Gleichungssystem abbildet.

#### 4.4.3 Besetzen der Matrix und der rechten Seite

Das Erstellen des Gleichungssystems erfolgt für jeden Zeitschritt erneut. Vor dem Besetzen werden alle Elemente in der Matrix und auf der rechten Seite auf null gesetzt. In einer Schleife werden für alle Berechnungsknoten entsprechend ihrer Art (Offener Rand, Wand, Feldpunkt usw.) mit Hilfe der elementaren Differenzierungsfunktionen die drei zugehörigen Zeilen in der Matrix und der rechten Seite besetzt.

Sollen beispielsweise am Knoten  $k$  die Gleichungen

$$\zeta_t + u \zeta_x + v \zeta_y + h(u_x + v_y) = 0$$

$$u_t + uu_x + vv_y + g \zeta_x = 0$$

$$v_t + uv_x + vv_y + g \zeta_y = 0$$

diskretisiert werden, so sind dafür folgende Funktionsaufrufe notwendig:

elementare Differenzierungsfunktion	Gleichungsindex $l$	Variablenindex $m$	Faktor $f$
qt	0	0	1
qx	0	0	$u$
qy	0	0	$v$
qx	0	1	$h$
qy	0	2	$h$
qt	1	1	1
qx	1	1	$u$
qy	1	1	$v$
qx	1	0	$g$
qt	2	2	1
qx	2	2	$u$
qy	2	2	$v$
qy	2	0	$g$

Dieses Schema kann für jede linearisierte Differentialgleichung mit drei Unbekannten angewendet und leicht auf beliebig viele Unbekannte erweitert werden. Unter Umständen müssen weitere elementare Differenzierungsfunktionen implementiert werden.

#### 4.4.4 Lösung linearer Gleichungssysteme

Das gebildete lineare Gleichungssystem kann mit verschiedenen Methoden, die alle die gleichen Schnittstellen besitzen und deshalb gegeneinander austauschbar sind, gelöst werden. Welche Methode die effizienteste ist, hängt von der speziellen Problemstellung ab. Grundsätzlich ist die Matrix des Gleichungssystems schwach besetzt. Sind im Rechengebiet alle Gitterpunkte mit Berechnungsknoten besetzt, d. h. es gibt keine Stellen, die über Wasser liegen, so liegt eine Bandmatrix mit bis zu 31 Bändern vor. Diese Bandstruktur wird zerstört, sobald ein Punkt des kartesischen Gitters nicht in die Berechnung mit eingeht.

Zum Testen von neuen, modifizierten Gleichungen und zur Fehlersuche steht die robuste Gauß-Elimination mit Pivotisierung zur Verfügung, die eine vollständig gespeicherte Matrix verlangt und die wegen des damit verbundenen Speicherbedarfs und des hohen Rechenaufwands nur für sehr kleine Rechengebiete angewendet werden kann. Iterative Lösungsverfahren können hingegen die schwach besetzte Struktur der Matrix, die als Bandmatrix oder im COO-Format gespeichert werden kann, ausnutzen. Als iterative Lösungsverfahren stehen das überrelaxierte Gauß-Seidel-Verfahren (Successive Overrelaxation, SOR) und GMRES (Generalized Minimal Residual) zur Verfügung. Bei beiden Verfahren werden die Genauigkeitsschranke und die maximale Iterations-

zahl vorgegeben. Beim SOR wird zusätzlich der Relaxationsparameter angegeben. Einen Überblick über moderne Iterationsverfahren geben Hackbusch (1993) und Barrett et. al. (1994).

#### 4.4.4.1 Gauß-Seidel-Verfahren

Das relaxierte Gauß-Seidel-Verfahren ist eine Erweiterung des Jacobi-Verfahrens. Ausgehend von einem Startvektor  $\mathbf{Q}^{(0)}$  erfolgt eine Iteration nach der Vorschrift

$$q_i^{(\mu+1)} = q_i^{(\mu)} + \omega \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} q_k^{(\mu+1)} - \sum_{k=i}^N a_{ik} q_k^{(\mu)}}{a_{ii}}$$

wobei  $N$  für Anzahl aller Zustandsvariablen (= Dimension des Lösungsvektors) steht. Der Relaxationsparameter  $\omega$  kann Werte zwischen 0 und 2 annehmen. Ist  $\omega$  kleiner als 1, spricht man von Unterrelaxation, und die Konvergenz wird verlangsamt. Ist  $\omega$  größer als 1, spricht man von Überrelaxation. Die Konvergenz kann dann beschleunigt werden. Der optimale Wert für  $\omega$  muß empirisch bestimmt werden. Es hat sich bei den durchgeführten Simulationen gezeigt, daß Werte zwischen 1.1 und 1.2 zu einer deutlichen Beschleunigung der Konvergenz führen.

Die Iteration wird beendet, wenn die maximalen Veränderungen jedes Elements des Lösungsvektors innerhalb eines Iterationsschritts unterhalb einer vorgegebenen Schranke  $\varepsilon$  liegen, d.h. wenn

$$\max(|q_i^\mu - q_i^{\mu-1}|) < \varepsilon$$

Der Startvektor  $\mathbf{Q}^{(0)}$  ist der Zustandsvektor des letzten Zeitschritts. Je kleiner die Dauer eines Zeitschritts  $\Delta t$  ist, umso schneller konvergiert das Lösungsverfahren, da die Veränderungen der Wellenerhebung und der Geschwindigkeiten innerhalb eines Zeitschritts entsprechend kleiner sind.

#### 4.4.4.2 GMRES

Das Iterationsverfahren GMRES (Generalized Minimal Residual) wurde von Saad und Schultz (1986) vorgestellt. Es ist eine Erweiterung des MINRES-Verfahrens für nicht symmetrische Matrizen.

Die Iterationsvorschrift ist

$$\mathbf{Q}^{(\mu)} = \mathbf{Q}^{(0)} + y_1 \mathbf{v}^{(1)} + \dots + y_\mu \mathbf{v}^{(\mu)}$$

Im Gegensatz zum Gauß-Seidel-Verfahren erfolgt die Iteration hier nicht innerhalb des Lösungsvektors  $\mathbf{Q}$ , sondern mit dem gesamten Vektor. Die Koeffizienten  $y_k$  werden so gewählt, daß die residuale Norm  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{Q}^{(\mu)}\|$  ein Minimum erreicht. Es müssen also

für jeden Iterationsschritt ( $\mu$ ) ein Satz von  $\mu$  Vektoren  $\mathbf{v}$  gebildet werden. Um den Rechenaufwand und den Speicherplatzbedarf zu begrenzen, wird deshalb das Verfahren wiederholt neu gestartet. Das Verfahren wird nach  $m$  Iterationsschritten abgebrochen und die bis dahin ermittelte Näherungslösung  $\mathbf{Q}^{(m)}$  als Startvektor für  $m$  neue Iterationsschritte verwendet. Das Verfahren hat den Vorteil, daß es auf jeden Fall konvergiert, solange die Matrix nicht singulär ist. Allerdings können dafür bei sehr schlecht konditionierten Matrizen genau  $N$  Iterationsschritte erforderlich sein, wobei dann die Rechenzeit und der Speicherbedarf deutlich höher sind als bei der Gauß-Elimination. Innerhalb dieses Verfahrens müssen nur Matrixmultiplikationen mit einem Vektor durchgeführt werden, was für die hier vorkommenden schwach und unregelmäßig besetzten Matrizen vorteilhaft ist. Obwohl in dieser Implementierung nur ein Jacobi-Präkonditionierer verwendet wird, konvergiert es schneller als das Gauß-Seidel-Verfahren. Durch die Verwendung anderer Präkonditionierer könnte das Verfahren evtl. noch beschleunigt werden (vgl. Barrett et al. 1994).

## 4.5 Filterung

Obwohl das verwendete Diskretisierungsschema sehr robust ist, können durch die Randbedingungen, insbesondere durch die Schlankkörpertheorie und an treppenstufig begrenzten Wänden, hochfrequente Schwingungen erzeugt werden. Diese Schwingungen sind numerisch und nicht physikalisch bedingt und sollten deshalb ausgefiltert werden. Hierzu stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung, die nach der Simulation des Zeitschritts, d.h. nach dem Lösen des Gleichungssystems angewendet werden können. Es kommt dabei immer nur eins der vorgestellten Verfahren zum Einsatz.

### 4.5.1 Globale Filterung

Bei der globalen Filterung nach Shapiro (1970, 1975) wird für jede Zustandsgröße an jedem Gitterpunkt eine gewichtete Mittelwertbildung durchgeführt:

$$\tilde{q} = \frac{q_{i-1} + w q_i + q_{i+1}}{w + 2} \quad (4.11)$$

Je kleiner das Glättungsgewicht  $w$  ist, umso größer ist der Einfluß der Nachbarpunkte auf den zu filternden Punkt. Diese Filterung wird nacheinander in  $i$ - und  $j$ -Richtung durchgeführt. Die globale Filterung wird in der Regel nicht nach jedem Zeitschritt, sondern in bestimmten Intervallen durchgeführt, da sie eine stark dämpfende Wirkung hat.

### 4.5.2 Lokale Filterung

Die lokale Filterung arbeitet mit der gleichen gewichteten Mittelwertbildung wie die globale Filterung in (4.11). Allerdings wird sie nicht auf alle Punkte im Rechengebiet angewendet, sondern nur auf solche, die zwei Filterungsbedingungen erfüllen:

1. An dem zu filternden Punkt muß ein Krümmungswechsel im Längs- bzw. Querschnitt vorliegen, also  $\frac{\partial^2 q(\eta-\delta)}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 q(\eta+\delta)}{\partial \eta^2} < 0$
2. Die zu filternde Variable muß von den Nachbarwerten stark abweichen:  
 $|q(\eta-\delta) - q(\eta)| + |q(\eta+\delta) - q(\eta)| > 2|q(\eta+\delta) - q(\eta-\delta)|$

Die Kriterien wurden von Schröter (1995) vorgeschlagen und eignen sich für die hier behandelten Probleme sehr gut. Die lokale Filterung wird wie die globale Filterung nacheinander in  $x$ - und  $y$ -Richtung durchgeführt. Da immer nur die Punkte behandelt werden, an denen Schwingungen auftreten, kann sie in der Regel nach jedem Zeitschritt angewendet werden.

### 4.5.3 Spektrale Filterung

Die spektrale Filterung arbeitet nach einem anderen Verfahren. Hier werden zu jedem Wert an jedem Gitterpunkt ein konstante Vielfache der zweiten und vierten Ableitung addiert:

$$\tilde{q} = q + C_2 q_{\eta\eta} - C_4 q_{\eta\eta\eta\eta} \quad (4.12)$$

Dadurch werden nur die hochfrequenten Schwingungsanteile gedämpft. Dieses Filterverfahren kann auch zu höheren Ordnungen erweitert werden, was sich allerdings in der Praxis als nicht erforderlich erweist. Die Dämpfung zweiter Ordnung, die durch den Parameter  $C_2$  gesteuert wird, wirkt sich sehr stark aus. Deswegen sollte für  $C_2$  ein kleiner Wert gewählt werden; in der Regel ist  $C_2$  null. Dieses Verfahren wird für alle Gitterpunkte nacheinander in  $x$ - und  $y$ -Richtung durchgeführt. Es kann nach jedem Zeitschritt angewendet werden. In dieser Formulierung sind beide Parameter von der Gitterweite und dem Filterungsintervall abhängig, was bei der Wahl der Parameter berücksichtigt werden muß. Die vierte Ableitung wird numerisch aus der zweiten Ableitung gebildet, um Schwierigkeiten an den Rändern zu begegnen.

### 4.5.4 Schwamm

Insbesondere an den Ein- und Auströmrändern können unter bestimmten Bedingungen Störungen auftreten, die durch eine spezielle Dämpfungstechnik beseitigt werden können. Diese als Schwammtechnik bezeichnete Dämpfung kann in einem kurzen Bereich hinter dem Einströmrand bzw. vor dem Auströmrand angewendet werden. Alle Zustandsgrößen auf dem Rand selbst werden auf null gesetzt. Vom Rand des Schwamms bis zum Rand des Rechengebiets erfolgt dann nach jedem Zeitschritt eine



Interpolation zwischen den berechneten Zustandsgrößen und null. Dies entspricht einem auf einen kurzen Raum komprimierten asymptotischen Abklingen jeder Störung im Strömungsgebiet. Das Rechengebiet kann damit in seiner Größe effektiv begrenzt werden. Der Schwamm kann unabhängig von den oben beschriebenen Filterungstechniken angewendet werden, ist aber vor allem in Kombination mit der lokalen und der spektralen Filterung von Interesse. Der Schwamm kann auch implizit formuliert werden, s. Romate (1992).

#### **4.6 Gebietszerlegung und Kopplung mit anderen Berechnungsverfahren**

Zwei Erweiterungen können den Einsatzbereich des Verfahrens deutlich vergrößern: Die Kopplung des Berechnungsverfahrens mit anderen numerischen Verfahren und die Aufteilung des Berechnungsgebiets in mehrere Teilgebiete für eine parallelisierte Lösung. Die Gebietsaufteilung kann gleichermaßen als Kopplung mehrerer unabhängiger Berechnungsgebiete betrachtet werden.

Durch die Kopplung verschiedener Berechnungsverfahren können die Vorteile des jeweiligen Verfahrens in einem lokalen Strömungsgebiet besser ausgenutzt und Nachteile oder Beschränkungen in anderen Teilen des Strömungsgebiets umgangen werden. Während z. B. mit den Flachwassergleichungen die Wellenausbreitung sehr gut und effizient berechnet werden kann, berücksichtigt die Modellierung des Schiffs durch die Schlankkörpertheorie weder die exakte Schiffsform noch Propulsions- oder Steuerorgane. Auf der anderen Seite kann mit potentialtheoretischen Paneelverfahren oder RANSE-Verfahren die schiffsnahe Umströmung sehr detailliert berechnet werden; für die Simulation großer Gebiete stehen aber meistens die Ressourcen nicht zur Verfügung. Es bietet sich deshalb an, die schiffsnahe Umströmung mit einem anderen Verfahren zu berechnen als das umgebende große Strömungsgebiet. Die Berechnung kann dabei auf verschiedene Prozessoren verteilt werden und zu einer Beschleunigung der Berechnung führen. So kann es auch bei alleiniger Anwendung der Flachwassergleichungen bei sehr großen Rechenproblemen interessant sein, das Gesamtgebiet durch eine Kopplung mehrerer Teilgebiete zu berechnen, um durch die Parallelisierung die Berechnung zu beschleunigen, was letztendlich einer Gebietszerlegung entspricht.

Die grundsätzliche Idee der Kopplung besteht darin, daß die Lösung des einen Gebiets dem anderen, benachbarten Gebiet als Randbedingung vorgegeben wird. Je nach den zu koppelnden Verfahren müssen die Randbedingungen dabei auf verschiedene Weisen aneinander angepaßt werden. In den folgenden Abschnitten werden zuerst eine stationäre Kopplung eines potentialtheoretischen Paneelverfahrens mit dem Flachwasserverfahren und anschließend die instationäre Kopplung zweier Flachwassergebiete

beschrieben. Die Beschreibung einer instationären Kopplung mit einem RANSE-Verfahren geben Stuntz et al. (2003).

Während die Parallelisierung des Gleichungslösers keinen großen Geschwindigkeitsgewinn bringt, kann durch eine Gebietszerlegung bzw. die Kopplung mehrerer Teilgebiete, die Simulation wesentlich beschleunigt werden. Dadurch, daß der Zeitschritt in den einzelnen Gebieten getrennt simuliert wird, d. h. die Gleichungssysteme in den Rechengebieten entkoppelt sind, können die Simulationen der einzelnen Rechengebiete auf verschiedene Prozesse und damit auf mehrere Prozessoren aufgeteilt werden.

#### 4.6.1 Stationäre Kopplung mit einem potentialtheoretischen Paneelverfahren

Zunächst soll die stationäre Lösung eines potentialtheoretischen Paneelverfahrens mit dem Flachwasserverfahren gekoppelt werden. Als Paneelverfahren wird hier das Verfahren UNOPAM verwendet, daß am Entwicklungszentrum für Schiffstechnik und Transportsysteme (DST) in Zusammenarbeit mit H. Söding entwickelt wurde.

Das relativ kleine, schiffsnahe Gebiet wird als „Innenfeld“ bezeichnet, während das große umgebende Gebiet „Außenfeld“ heißt. In Abb. 4.4 sind die beiden Rechengebiete skizziert. Das grobe Gitternetz im Außenfeld soll nur die Größe veranschaulichen; in der Anwendung haben die Gitternetze an der Wasseroberfläche im Innen- und Außenfeld ähnliche Auflösungen.

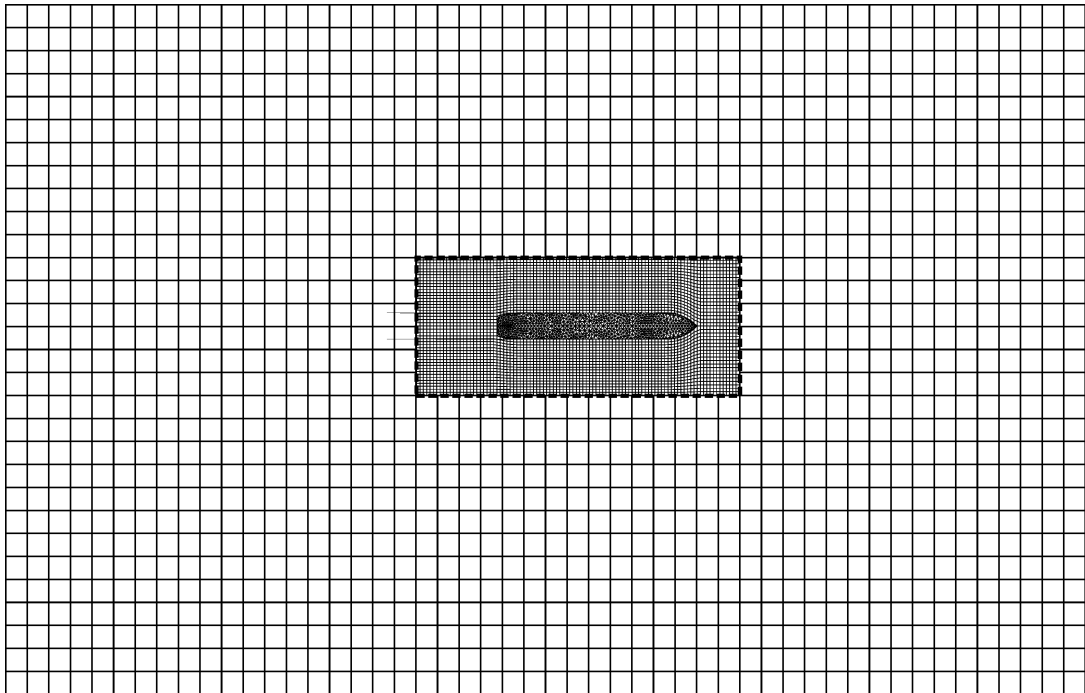


Abb. 4.4 Gekoppelte Rechengebiete (kleines Innenfeld von großem Außenfeld umgeben)

#### 4.6.1.1 Lösung im Innenfeld

Das Paneelverfahren UNOPAM basiert auf der Potentialtheorie und kann die instationäre Umströmung mehrerer Schiffe berechnen. Eine endliche, örtlich variierende Wassertiefe kann dabei berücksichtigt werden.

Der Schiffsrumpf wird mit Dreieckspaneele diskretisiert, die freie Wasseroberfläche mit Viereckspaneele. An der freien Oberfläche wird die nichtlineare Randbedingung erfüllt und die freie Oberfläche dynamisch angepaßt. Das Verfahren ist ebenfalls in der Lage, Auftriebskräfte an schräg angeströmten Körpern mit Hilfe von Wirbelquellen zu berechnen; diese Option wird hier nicht verwendet.

Da UNOPAM in der derzeitigen Version keine Randbedingung aufgeprägt werden kann, ist nur eine unidirektionale Kopplung vom Innen- ins Außenfeld möglich. Dies führt nicht zu Fehlern, solange im Innenfeld die gleichen Randbedingungen wie im Außenfeld verwendet werden und keine Wellen in das Innenfeld einfallen bzw. reflektiert werden. Innen- und Außenfeld müssen also mit derselben Wassertiefe oder Bodentopographie rechnen. Auch muß eine evtl. vorhandene Wand, die das Außenfeld seitlich begrenzt, im Innenfeld berücksichtigt werden. Dies wird durch Spiegelung der Quellen an der Wand, die selbst nicht im Rechengebiet liegen muß, erreicht.

Das Potential  $\phi$  im Innenfeld wird durch eine Überlagerung von  $N$  Punktquellen approximiert:

$$\phi = \sum_{j=1}^N q_j G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_j) \quad (4.13)$$

mit der Green-Funktion

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_j) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j|} \quad (4.14)$$

und der Quellstärken  $q_j$  und dem Quellort  $\boldsymbol{\xi}_j$ .

Der Geschwindigkeitsvektor an beliebiger Stelle  $\mathbf{x}$  im Fluid ist dann

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla \phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N q_j \nabla G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_j) \quad (4.15)$$

mit

$$\nabla G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_j) = -\frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j|^3} \quad (4.16)$$

#### 4.6.1.2 Implementierung der Kopplung

Ein wichtiger Schritt bei der Kopplung ist die Berechnung der Randwerte für das

Außenfeld an der Kopplungsgrenze. In Abb. 4.5 ist ein Ausschnitt der Grenze zwischen Innen- und Außenfeld dargestellt; das Außenfeld ist grau unterlegt. An den Randgitterpunkten des Außenfelds, die mit einem Kreis gekennzeichnet sind, müssen die vertikal gemittelten horizontalen Geschwindigkeitskomponenten und die Wellenerhebung vorgegeben werden.

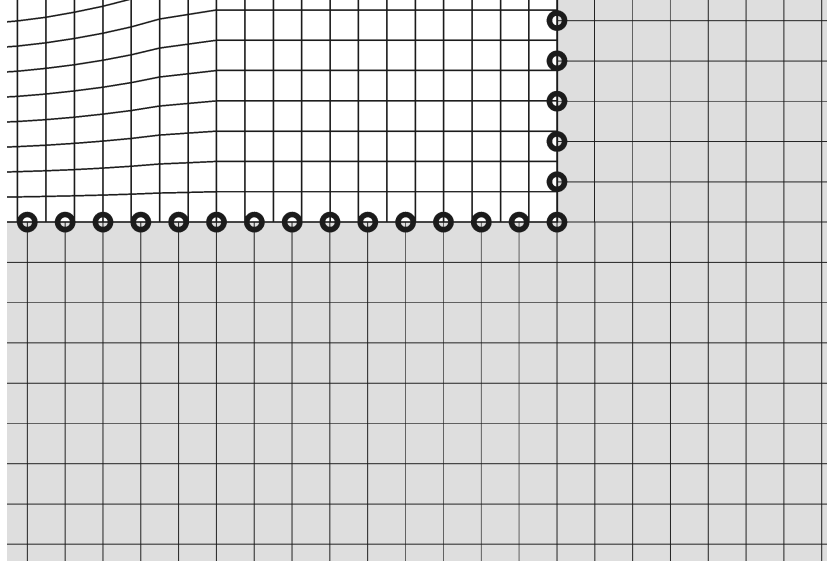


Abb. 4.5 Detailausschnitt an der Kopplungsgrenze  
(Randgitterpunkte des Außenfelds mit Kreisen gekennzeichnet)

Die Wellenerhebung  $\zeta$  wird aus den Koordinaten der benachbarten Oberflächenpaneele linear interpoliert. Die Geschwindigkeiten  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  werden durch numerische Integration mittels der Trapezregel wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y) &= \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^{Z-1} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, h(x, y) + (i + \frac{1}{2}) \Delta z) \\ \bar{v}(x, y) &= \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^{Z-1} \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, h(x, y) + (i + \frac{1}{2}) \Delta z)\end{aligned}\tag{4.17}$$

mit

$$\Delta z = \frac{h(x, y) + \zeta(x, y)}{Z}$$

$Z$  ist die Anzahl der vertikalen Stützstellen für die Integration,  $x$  und  $y$  sind die Gitterkoordinaten im Außenfeld an der Kopplungsgrenze.

Mit den im Innenfeld berechneten Quellstärken ergeben sich schließlich

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x, y) &= -\frac{1}{Z} \sum_{i=0}^{Z-1} \sum_{j=1}^N q_j \frac{x - \xi_{j,1}}{\left[ x, y, -h(x, y) + \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta z \right]^T - \xi_j} \\
\bar{v}(x, y) &= -\frac{1}{Z} \sum_{i=0}^{Z-1} \sum_{j=1}^N q_j \frac{y - \xi_{j,2}}{\left[ x, y, -h(x, y) + \left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta z \right]^T - \xi_j}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Während im Innenfeld eine stationäre Lösung vorliegt, arbeitet das Flachwasserverfahren im Außenfeld grundsätzlich instationär. Die Innenfeldlösung wird deshalb als asymptotische Lösung der instationären Simulation aufgefaßt. Das ist so lange zulässig, wie das physikalische Problem einen asymptotischen Zustand erreicht, d. h. die Schiffsgeschwindigkeit konstant ist, nicht im transkritischen Bereich liegt und die Wassertiefe in Fahrtrichtung unveränderlich ist. So wird zuerst die stationäre Lösung im Innenfeld ermittelt. Aus dieser wird die Randbedingung berechnet, die dem Außenfeld in jedem Zeitschritt vorgegeben wird.



## 5 Simulationen

Nach der Beschreibung der Implementierung wird in diesem Kapitel untersucht, für welche Problemstellungen Berechnungen mit den Flachwassergleichungen möglich sind und wo die Grenzen ihrer Anwendbarkeit liegen. Zur Überprüfung der Genauigkeit und Zuverlässigkeit des Berechnungsverfahrens werden sowohl theoretische Fälle als auch Ergebnisse aus Modellversuchen herangezogen. Hierbei wurde versucht, ein möglichst breites Spektrum von denkbaren Anwendungsfällen auszuwählen. Bei der Beurteilung der Genauigkeit anhand von Modellversuchen, ist immer zu bedenken, daß auch Modellversuche und die zur Berechnung der Großausführungswerte herangezogenen Prognoseverfahren fehlerbehaftet sind. Weiterhin wurden die Ergebnisse aus anderen numerischen Verfahren zum Vergleich verwendet.

Numerische Berechnungen können sowohl für den Modellmaßstab als auch für die Großausführung erfolgen. Besonders wenn viskose Effekte berücksichtigt werden, ist eine Berechnung in der Großausführung wegen der großen Reynoldszahlen sehr schwierig. Da die Flachwassergleichungen keine viskosen Effekte berücksichtigen, kann die Berechnung in einem beliebigen Maßstab erfolgen und mit der Froudeschen Hypothese in beliebige Größenskalen umgerechnet werden.

### 5.1 Validierung

Zur Validierung können zunächst die numerischen Berechnungen mit analytischen Ergebnissen verglichen werden. Dies beschränkt sich allerdings auf wenige akademische Fälle, für die eine analytische Lösung existiert. Weitaus interessanter ist der Vergleich von Berechnungen mit experimentellen Ergebnissen, wobei aber nur solche Fälle herangezogen werden können, für die gesicherte Meßergebnisse aus Versuchen vorliegen. Gerade bei instationären Fällen erweist sich die Durchführung von Modellversuchen als schwierig und kann oft zu nicht reproduzierbaren Ergebnissen führen.

Eine dritte, schwächere Form der Validierung ist der Vergleich mit einem anderen validierten und anerkannten numerischen Verfahren. Wenn das Vergleichsverfahren nicht

selbst für den untersuchten Fall validiert worden ist, besteht eine gewisse Unsicherheit in dem Ergebnis des Vergleichsverfahrens selbst.

### 5.1.1 Zweidimensionale Wellenausbreitung

Zuerst wird die zweidimensionale Wellenausbreitung über unebenem Boden in einem schmalen Kanal simuliert. Dazu wird ein schmaler Wellentank modelliert, an dessen linkem Rand ein Wellenerzeuger installiert ist und dessen rechter Rand offen bzw. so stark gedämpft ist, daß keine Reflexion auftritt. Dies entspricht den Versuchsaufbauten von Dingemans (1997) und Beji, die unabhängig voneinander in einem solchen Kanal Messungen durchgeführt haben. Die Messergebnisse von Dingemans stehen zum Vergleich mit den hier durchgeführten Berechnungen zur Verfügung.

In Abb. 5.1 ist der Versuchsaufbau dargestellt. Auf dem Boden ist eine Schwelle aufgebaut, die sich über die gesamte Tankbreite erstreckt und auf deren Kopf sich die Wassertiefe von anfänglich 0.8 m auf 0.2 m verringert. Am rechten Rand, bei  $x = 46.04$  m, ist ein aktiver Wellenabsorber installiert. In der Simulation wird das Rechengebiet auf 60 m verlängert und am rechten Rand eine offene Randbedingung eingesetzt. Zur Messung der Wellenerhebung sind elf Wellensonden über der Tanklänge verteilt, deren  $x$ -Positionen ebenfalls dargestellt sind.

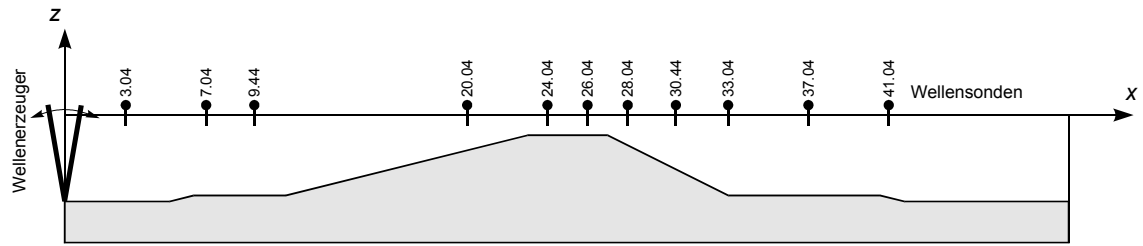


Abb. 5.1 Querschnitt durch die Versuchsaufbauten von Dingemans und Beji (Fälle A–C)

Der Wellenerzeuger am linken Rand ( $x = 0$  m) wird modelliert, indem die Wellenerhebung  $\zeta(0,t)$  und die vertikal gemittelte Geschwindigkeit  $u(0,t)$  dem Rechengebiet als Randbedingung aufgeprägt werden. Wellenerhebung und vertikal gemittelte Geschwindigkeit einer regelmäßigen Welle im flachen Wasser lassen sich wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned}\zeta(x,t) &= -\zeta_A \sin(kx - \omega t) \\ u(x,t) &= \frac{\zeta}{\zeta + h_0} \frac{\omega}{k} \frac{\sinh(kh_0) + \sinh(k\zeta)}{\sinh(kh_0)}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Darin sind  $\zeta_A$  die Wellenamplitude,  $\omega$  die Wellenkreisfrequenz und  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega^2}{g \tanh kh}$  die Wellenkreiszahl.

Es wurden drei Versuche mit unterschiedlichen Wellenamplituden und -perioden durchgeführt; Tabelle 5.1 gibt einen Überblick.



Tabelle 5.1: Versuchsparameter von Dingemans

	A	B	C
$T$	2.857 s	3.571 s	1.428 s
$\omega$	$2.1992 \text{ s}^{-1}$	$1.7595 \text{ s}^{-1}$	$4.4 \text{ s}^{-1}$
$a_0$	0.02 m	0.029 m	0.041 m

In den Abb. 5.4 – 5.6 sind die Zeitschriebe der elf Wellensonden für die Fälle A, B und C dargestellt. Die Übereinstimmung der berechneten mit den gemessenen Wellen in den Fällen A und B ist selbst über dem flachen Gebiet sehr gut. Erst im tieferen Bereich hinter der Schwelle zeigt sich sowohl eine Phasenverschiebung als auch eine Abweichung der Amplituden der Wellentäler. Im tiefen Bereich ( $h = 0.8 \text{ m}$ ) haben die Wellen eine Wellenzahl  $k = 0.841 \text{ m}^{-1}$ , d. h.  $\lambda = 7.467 \text{ m}$ . Diese Wellen haben eine Phasengeschwindigkeit  $V_p = 2.616 \text{ m/s}$ . Im flachen Gebiet ( $h = 0.2 \text{ m}$ ) werden die Wellen bei gleicher Frequenz kürzer ( $\lambda = 3.934 \text{ m}$ ). Damit ändert sich auch die Phasengeschwindigkeit zu  $V_p = 1.37 \text{ m/s}$ . Im Vergleich dazu betragen die kritischen Geschwindigkeiten im tiefen Bereich  $2.8 \text{ m/s}$  und im flachen Bereich  $1.4 \text{ m/s}$ . Das bedeutet, daß die Wellen mit einer für den flachen Bereich überkritischen Geschwindigkeit ankommen und deshalb im flachen Gebiet soweit verlangsamt und dabei verkürzt werden, daß die Phasengeschwindigkeit unterkritisch bleibt. Dabei wird die Wellenschwingung in mehrere Komponenten mit unterschiedlicher Frequenz aufgeteilt. Im Fall C findet keine Aufteilung der Wellenschwingung hinter der Schwelle statt. Dies liegt an der hohen Wellenfrequenz und den entsprechend kurzen und damit langsamen Wellen, die nur im flachen Bereich über der Schwelle eine leichte Verformung erfahren.

Zur näheren Erläuterung sollen fünf weitere, abgewandelte Fälle herangezogen werden, zu denen es keine vergleichbaren Messungen gibt. Abb. 5.2 zeigt den Boden des modifizierten Wellentanks im Querschnitt. Die Wassertiefe am linken Rand beträgt  $0.8 \text{ m}$  und verringert sich in der Mitte des Tanks auf  $0.2 \text{ m}$ . Am linken Rand befindet sich wieder ein Wellenerzeuger, der regelmäßige Wellen mit konstanter Frequenz und Amplitude erzeugt; der rechte Rand ist offen.

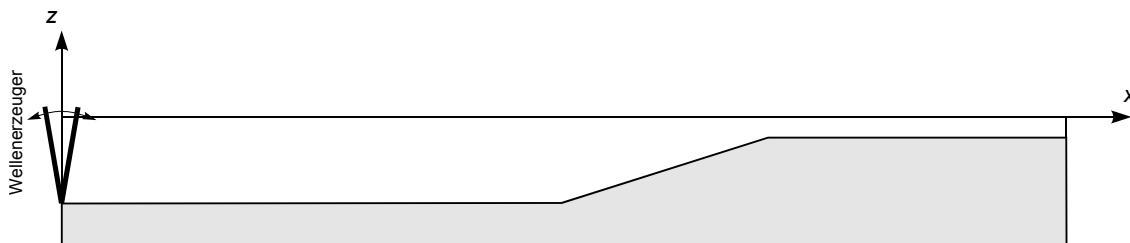


Abb. 5.2 Querschnitt durch den modifizierten Wellentank (Fälle D–G)

In allen fünf Fällen werden Wellen mit einer Amplitude von 0.02 m erzeugt; die Kreisfrequenzen variieren zwischen  $2 \text{ s}^{-1}$  und  $10 \text{ s}^{-1}$ . Tabelle 5.2 gibt einen Überblick über die Versuchsparameter. Die Abbildungen 5.7–5.12 zeigen die zeitliche Entwicklung der Wellenschnitte für die Fälle D–H. Hier ist zunächst zu erkennen, daß sich regelmäßige Wellen bis zum Ansteigen des Bodens bei  $x = 25 \text{ m}$  ausbreiten. Obwohl alle Berechnungen mit Dispersionskorrektur durchgeführt wurden, zeigt sich bereits ab  $\omega = 6 \text{ s}^{-1}$ , eine Dämpfung der Amplitude, die im Fall H besonders deutlich wird, bei dem sich die Wellenamplitude bei  $x = 25 \text{ m}$  auf die Hälfte abgeschwächt hat. Hier ist  $kh = 8.16$  und damit größer als der empfohlene Bereich bis  $2\pi$ .

Betrachtet man nun den Übergang vom tiefen in den flachen Bereich, so ist bei der kleinsten Wellenfrequenz in Fall D eine ähnliche Aufteilung der Wellenschwingung in mehrere Teilschwingungen zu beobachten, wie in den Messungen von Dingemans.

Tabelle 5.2: Versuchsparameter der modifizierten Fälle

	D	E	F	G	H	DST-Messung
$T$	3.142 s	1.571 s	1.047 s	0.785 s	0.628 s	0.5 s
$\omega$	$2 \text{ s}^{-1}$	$4 \text{ s}^{-1}$	$6 \text{ s}^{-1}$	$8 \text{ s}^{-1}$	$10 \text{ s}^{-1}$	$12.566 \text{ s}^{-1}$
$a_0$	0.02 m	0.02 m	0.02 m	0.02 m	0.02 m	0.01 m
$k$ ( $h=0.8\text{m}$ )	$0.7553 \text{ m}^{-1}$	$1.8194 \text{ m}^{-1}$	$3.6910 \text{ m}^{-1}$	$6.5266 \text{ m}^{-1}$	$10.1972 \text{ m}^{-1}$	
$k$ ( $h=0.2\text{m}$ )	$1.4455 \text{ m}^{-1}$	$3.0211 \text{ m}^{-1}$	$4.8838 \text{ m}^{-1}$	$7.2774 \text{ m}^{-1}$	$10.5068 \text{ m}^{-1}$	

Auch hier ist die Phasengeschwindigkeit im tiefen Bereich mit 2.65 m/s kleiner als die kritische Geschwindigkeit. Im flachen Bereich beträgt diese allerdings 1.38 m/s, so daß folglich eine Aufteilung in mehrere Wellenkomponenten stattfindet. Mit steigender Frequenz nimmt die Phasengeschwindigkeit immer weiter ab. Im Fall E, bei dem die Wellenfrequenz etwa der in Fall C gleicht, können die Wellen in den flachen Bereich weiterlaufen, wobei sich die Wellenlänge verkürzt und sich die Form zu ausgeprägten Flachwasserwellen mit steilem Wellenberg und breitem Wellental wandelt. Werden die Wellen noch kürzer, können sie zwar noch besser in den flachen Bereich einlaufen, der Transport wird jetzt aber durch die Dispersionseigenschaften der Boussinesq-Gleichung beschränkt, bis schließlich im Fall H praktisch keine Wellen das flache Gebiet erreichen.

Die Abnahme der Wellenamplitude in den flachen Gebieten, die in den Fällen F und G zu beobachten war, konnte grundsätzlich durch einen Versuch bestätigt werden, der im Entwicklungszentrum für Schiffstechnik und Transportsysteme (DST) durchgeführt wurde. In den Schleppkanal wurde eine Flachwasserstelle eingebaut, über der sich die Wassertiefe von 0.4 m auf 0.2 m verringerte. Mit einer Reihe von 13 Wellensonden

wurden die Zeitschriebe der Wellenerhebung aufgezeichnet. Eine 14. Wellensonde befand sich weit vor der Flachwasserstelle. Abb. 5.3 zeigt eine Skizze des Versuchsaufbaus.

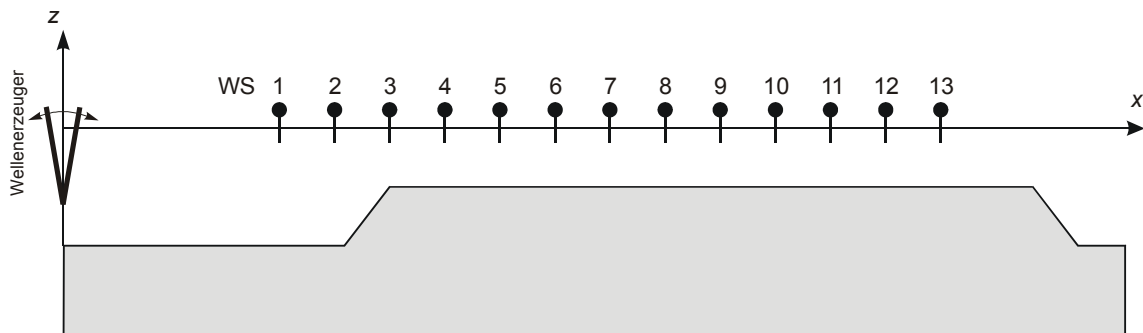


Abb. 5.3 Versuchsaufbau im DST für den Fall H

Mit dem installierten Wellenerzeuger wurden bei einem Wasserstand von 0.4 m Wellen mit der Kreisfrequenz  $12.57 \text{ s}^{-1}$  erzeugt, was einem  $kh = 6.44$  entspricht. Die Wellenamplitude betrug ca. 0.01 m. Mit dem Maßstabsfaktor 2 skaliert entsprechen die Versuchssparameter einer Wassertiefe von 0.8 m im tiefen, bzw. 0.4 m im flachen Bereich und einer Wellenamplitude von 0.02 m bei einer Kreisfrequenz von  $8.886 \text{ s}^{-1}$ . Bereits der Zeitschrieb der Wellensonde 14 weit vor der Flachwasserstelle zeigt, daß es nicht gelungen ist, regelmäßige, zweidimensionale Wellen zu erzeugen. Gründe hierfür waren u. a. eine nicht vollkommen abgeklungene Restschwingung im Versuchskanal. Trotz dieser Schwierigkeiten läßt sich gut erkennen, daß sich die anfängliche Wellenamplitude über der Flachwasserstelle (Wellensonden 3–13) etwa halbiert.

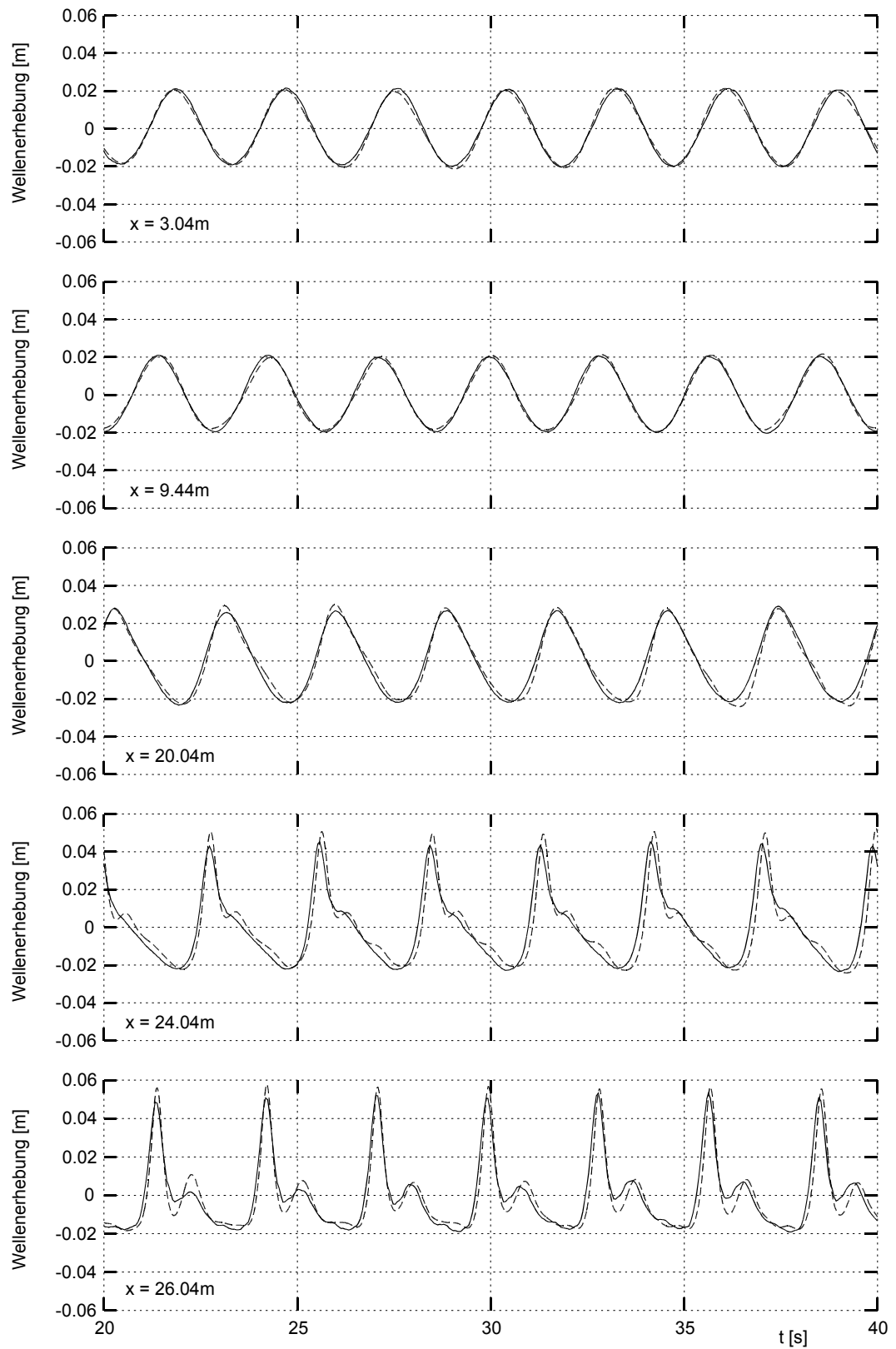


Abb. 5.4a Zeitschriebe der Wellensonden im Fall A  
 $(\omega=2.199\text{s}^{-1}, a=0.02\text{m}, C_{BQ}=-0.02)$

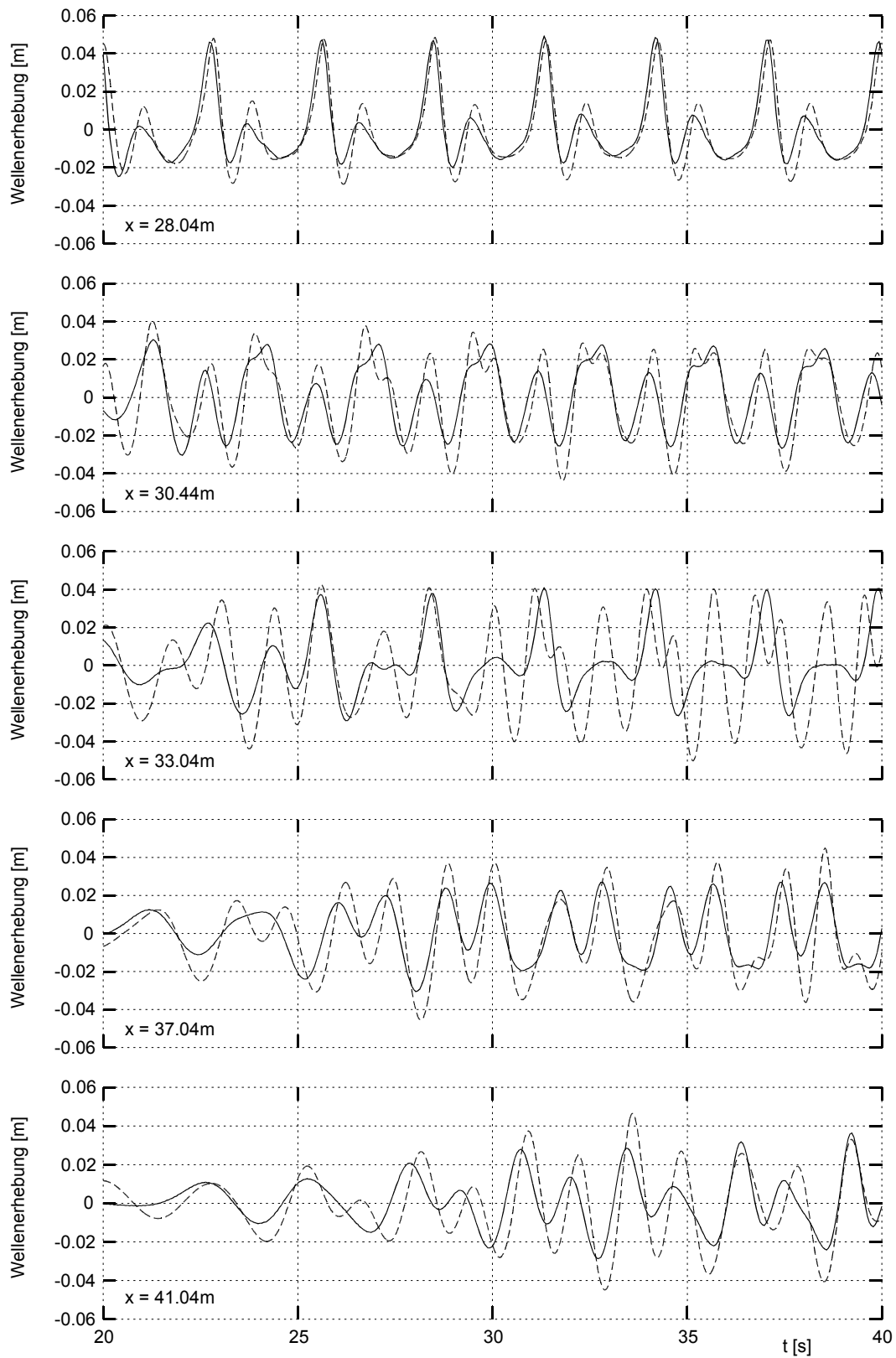


Abb. 5.4b Zeitschriebe der Wellensonden im Fall A  
( $\omega=2.199\text{s}^{-1}$ ,  $a=0.02\text{m}$ ,  $C_{BQ}=-0.02$ )

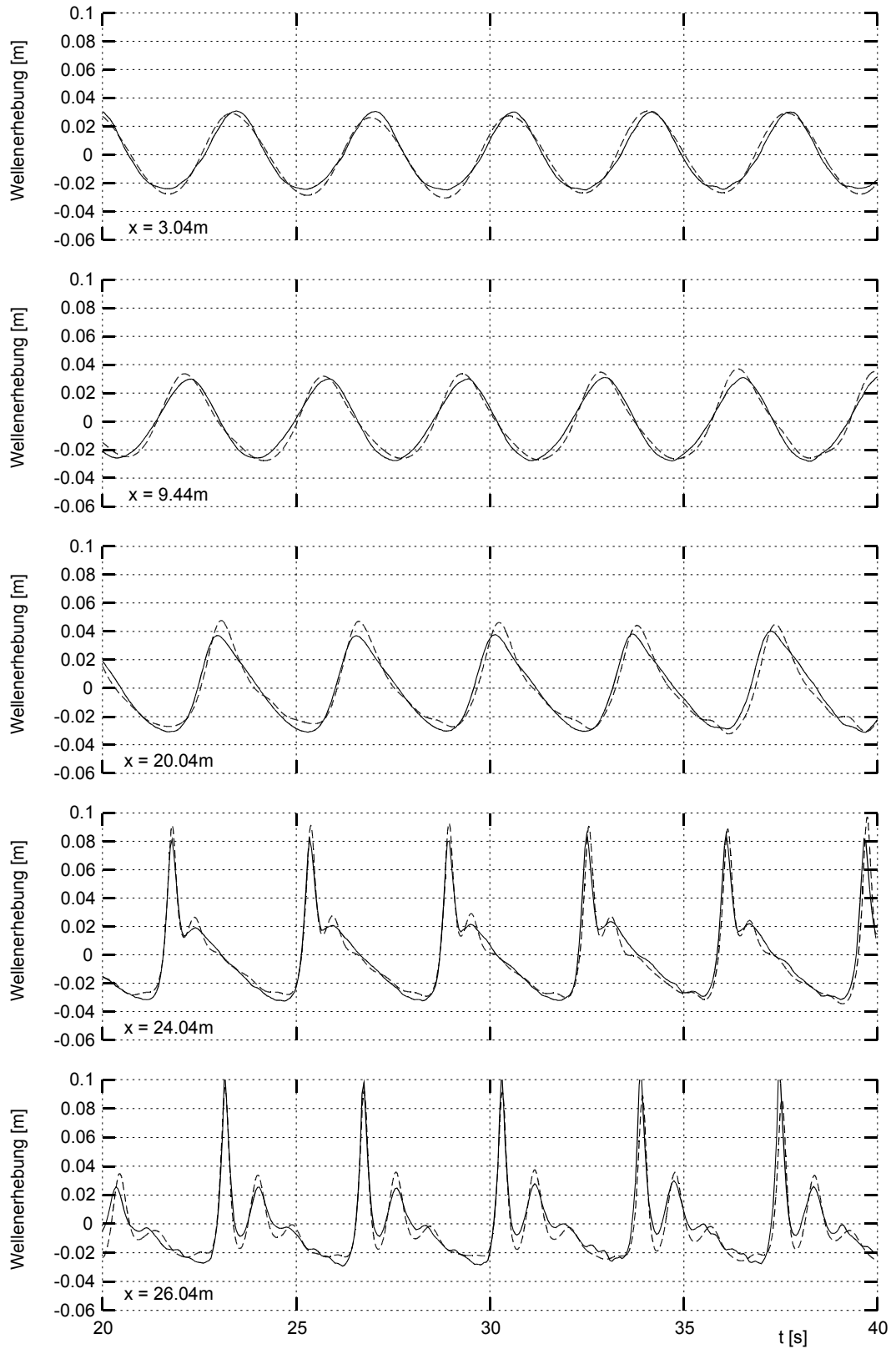


Abb. 5.5a Zeitschriebe der Wellensonden im Fall B  
( $\omega=1.7595\text{s}^{-1}$ ,  $a=0.029\text{m}$ ,  $C_{BQ}=0$ )

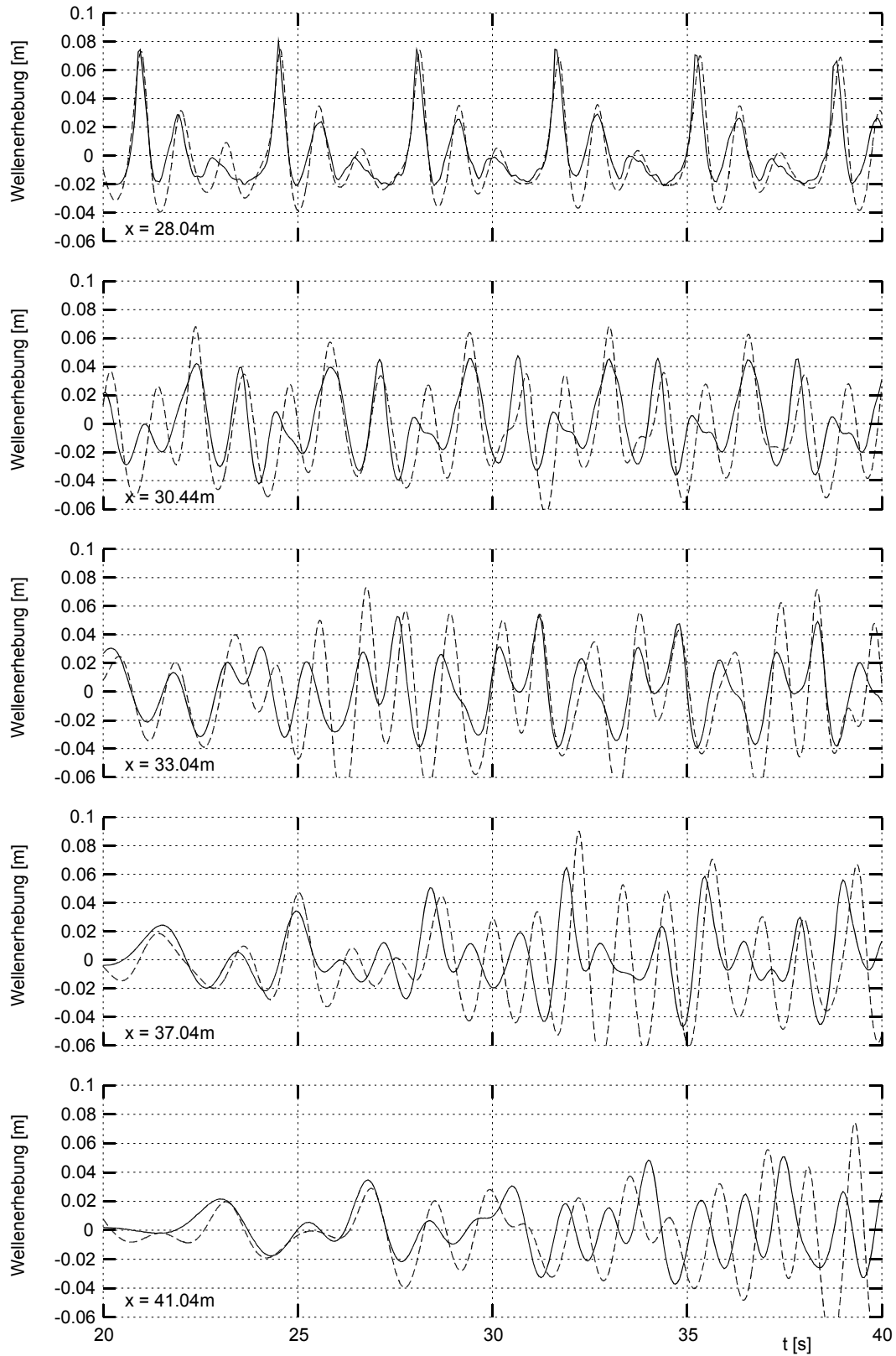


Abb. 5.5b Zeitschriebe der Wellensonden im Fall B  
 $(\omega=1.7595\text{s}^{-1}, a=0.029\text{m}, C_{BQ}=0)$

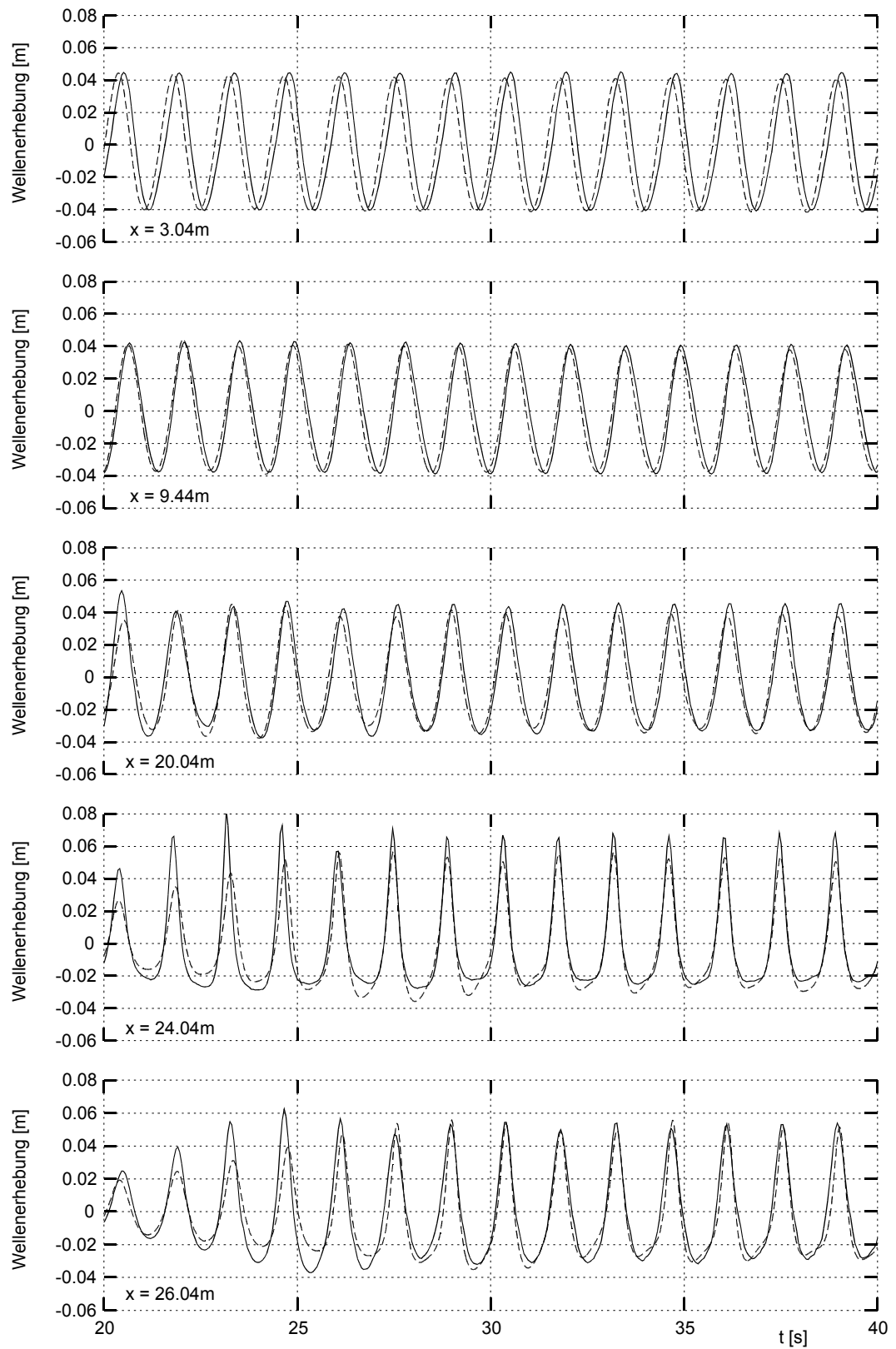


Abb. 5.6a Zeitschriebe der Wellensonden im Fall C  
( $\omega=4.4\text{s}^{-1}$ ,  $a=0.041\text{m}$ ,  $C_{BQ}=-0.015$ )



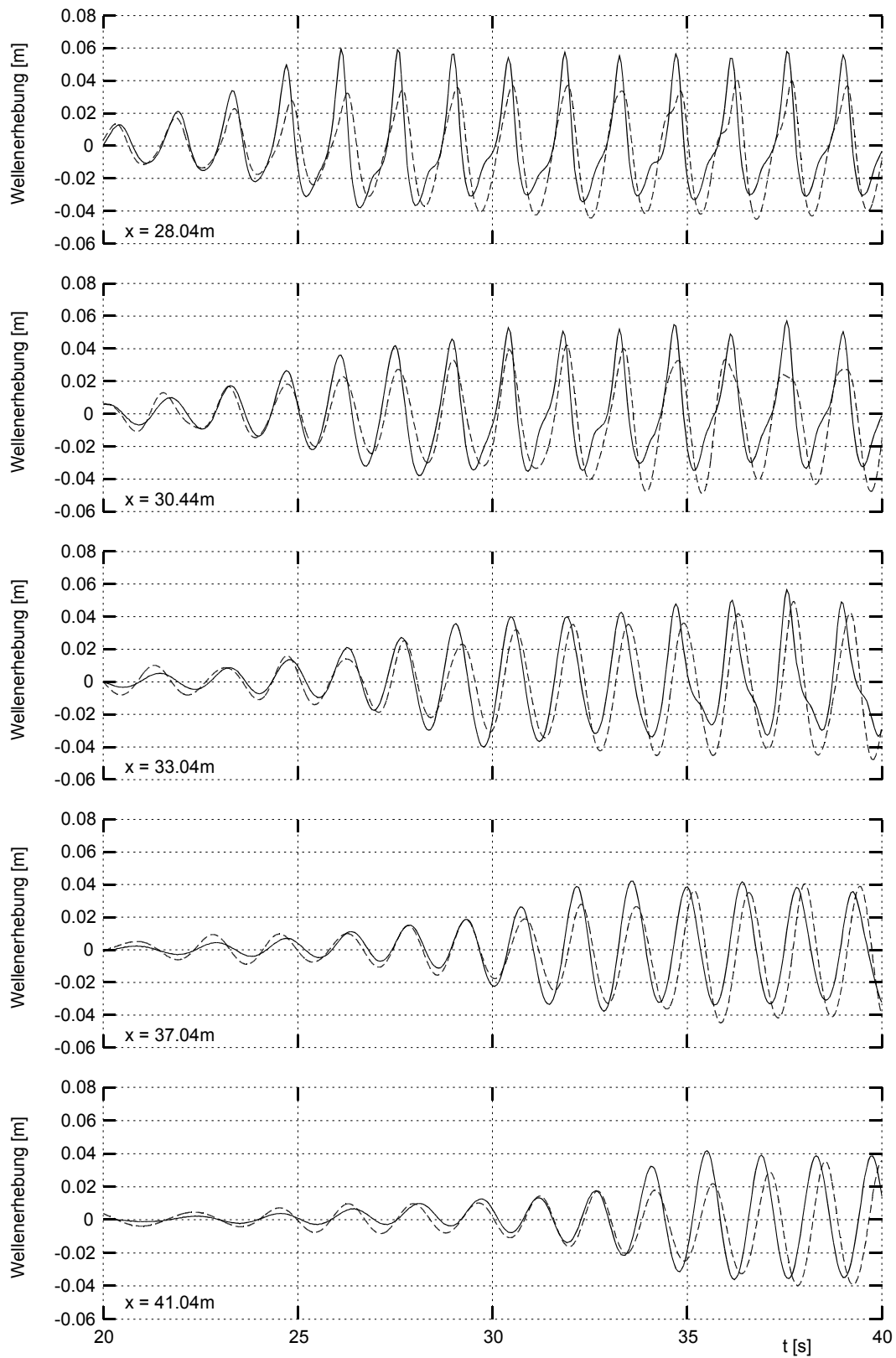


Abb. 5.6b Zeitschriebe der Wellensonden im Fall C  
( $\omega=4.4\text{s}^{-1}$ ,  $a=0.041\text{m}$ ,  $C_{BQ}=-0.015$ )

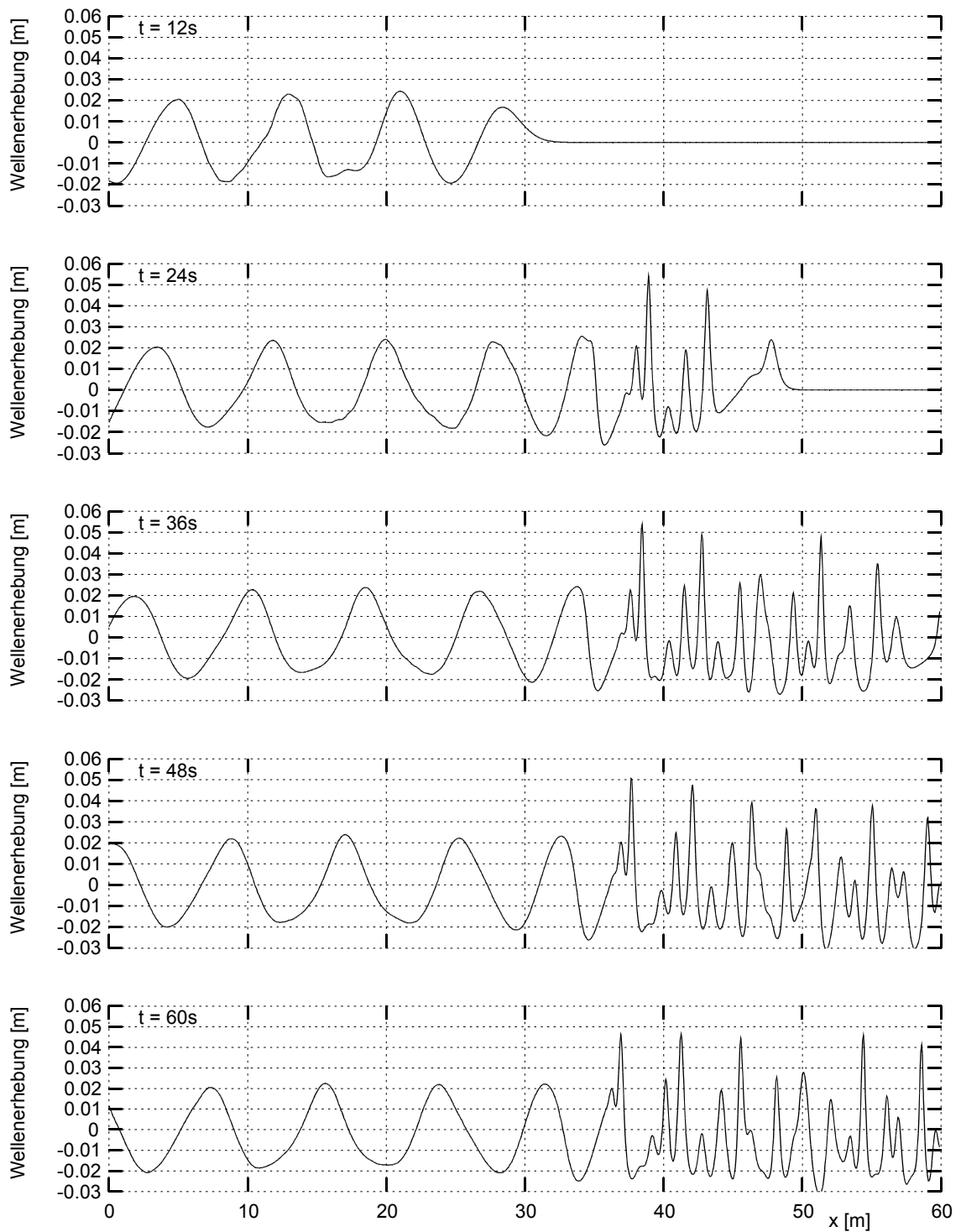


Abb. 5.7 Zeitliche Entwicklung der Wellenschnitte, Fall D  
 $(\omega=2\text{s}^{-1}, a=0.02\text{m}, C_{BQ}=-0.0572)$

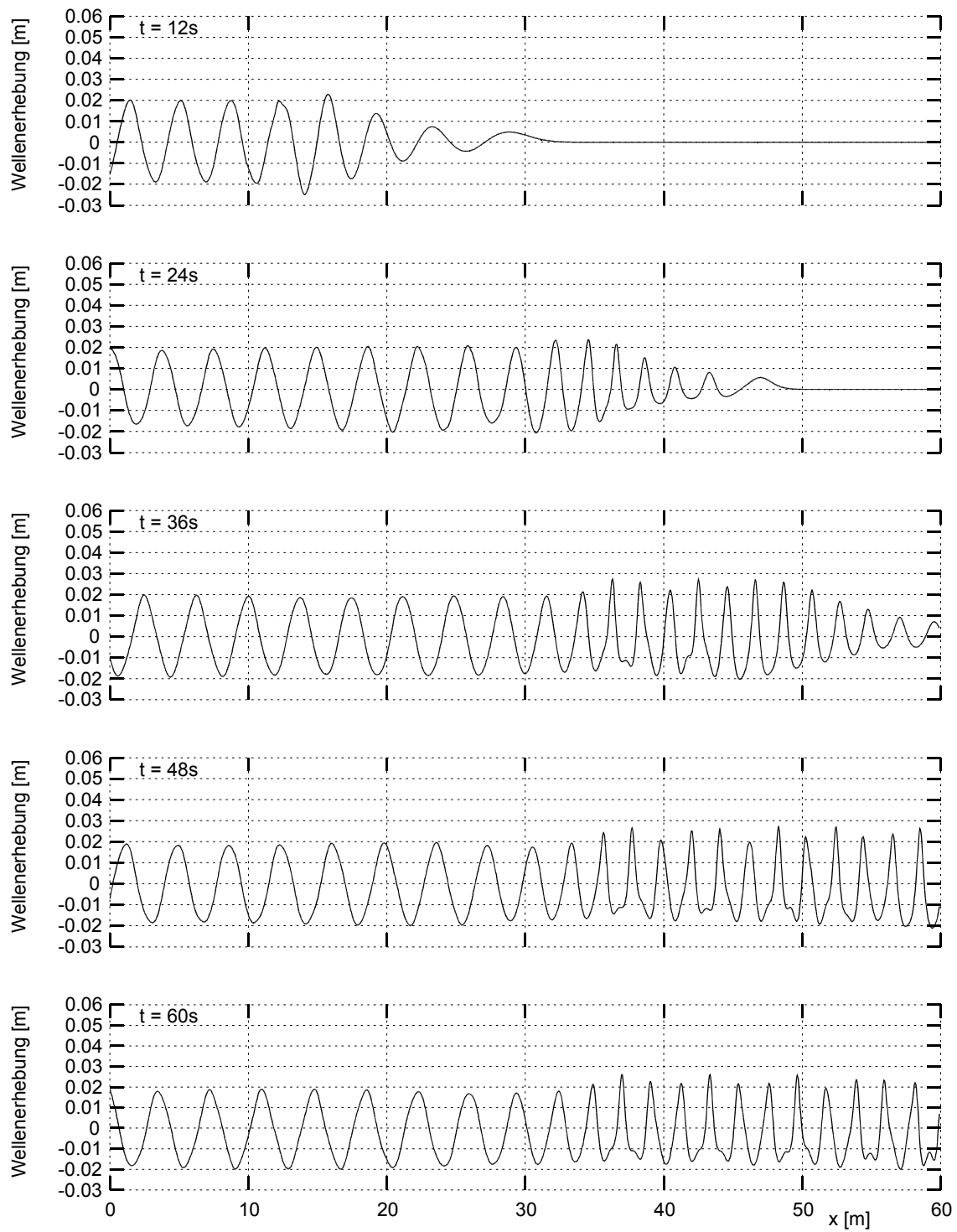


Abb. 5.8 Zeitliche Entwicklung der Wellenschnitte, Fall E  
 $(\omega=4s^{-1}, a=0.02m, C_{BQ}=-0.0572)$

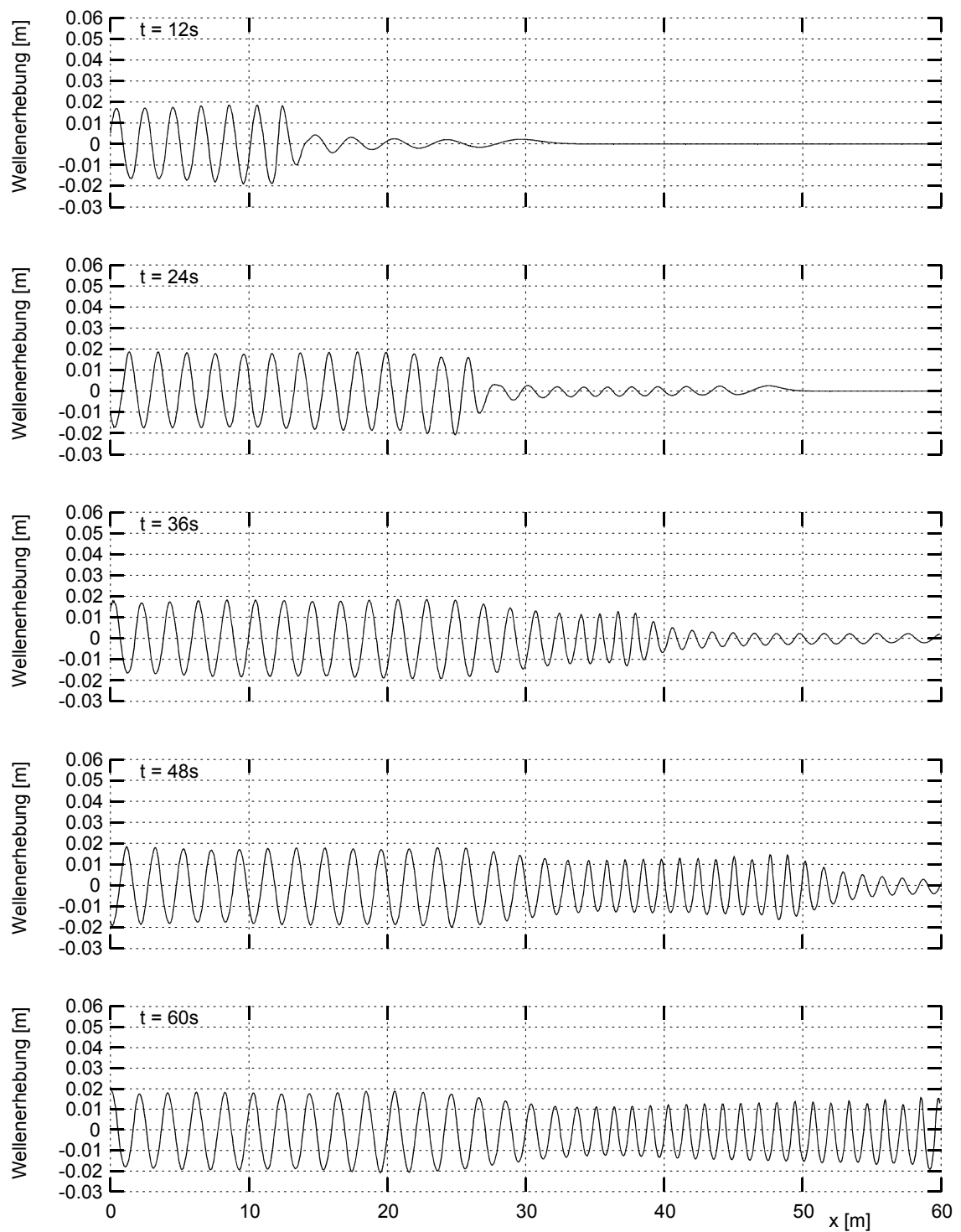


Abb. 5.9 Zeitliche Entwicklung der Wellenschnitte, Fall F  
 $(\omega=6s^{-1}, a=0.02m, C_{BQ}=-0.0572)$

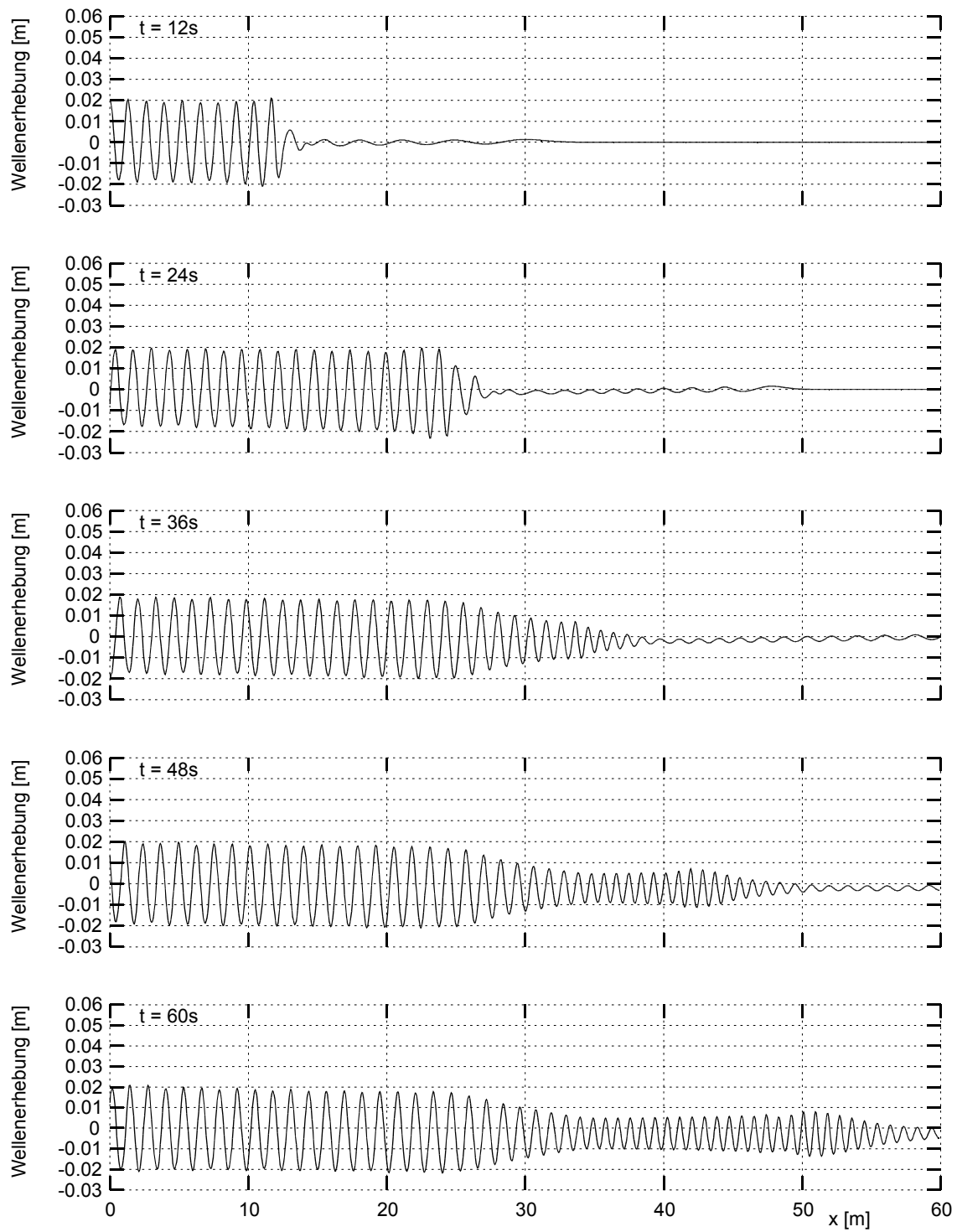


Abb. 5.10 Zeitliche Entwicklung der Wellenschnitte, Fall G  
 $(\omega=8\text{s}^{-1}, a=0.02\text{m}, C_{BQ}=-0.0572)$

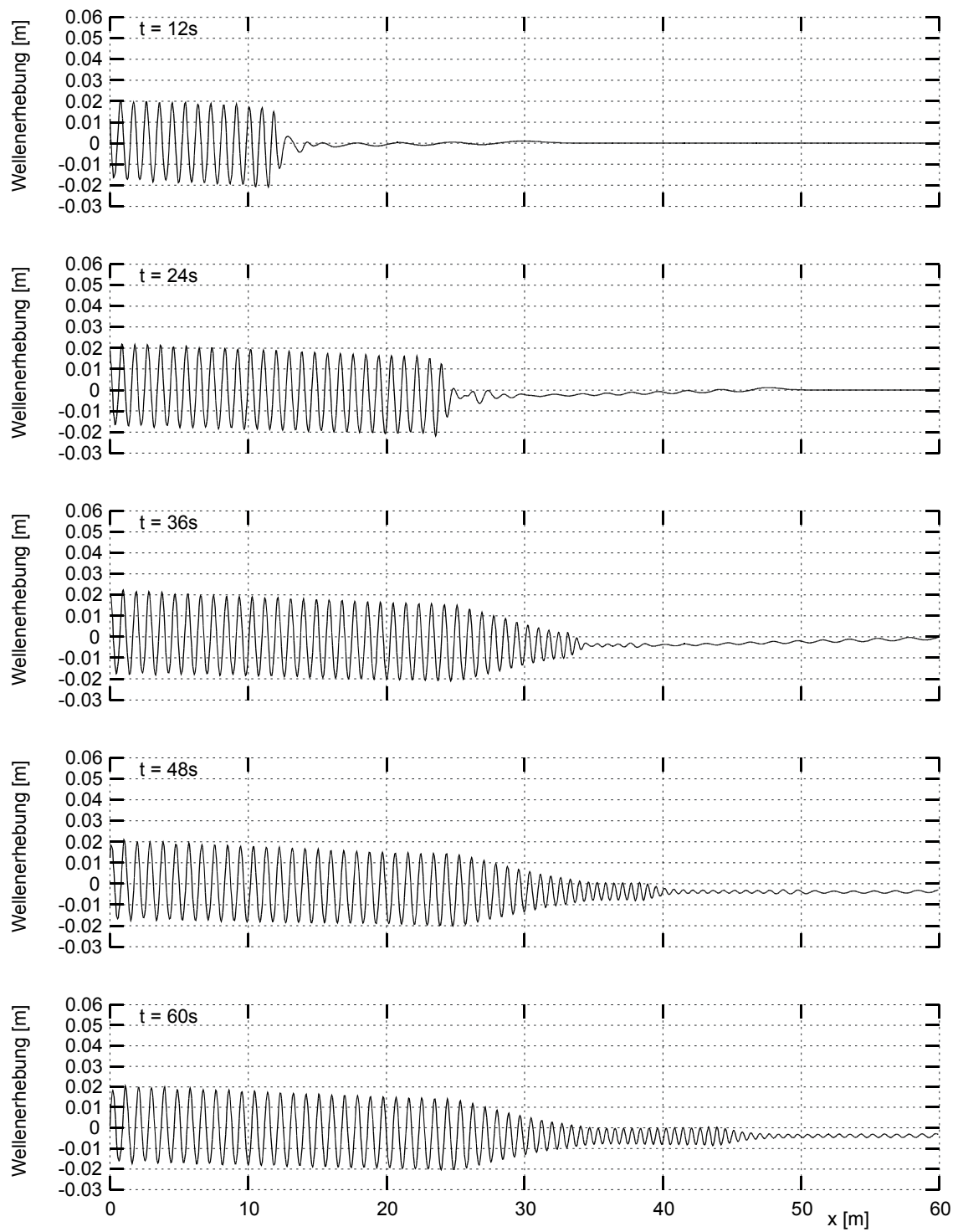


Abb. 5.11 Zeitliche Entwicklung der Wellenschnitte, Fall H  
( $\omega=10\text{s}^{-1}$ ,  $a=0.02\text{m}$ ,  $C_{BQ}=-0.0572$ )

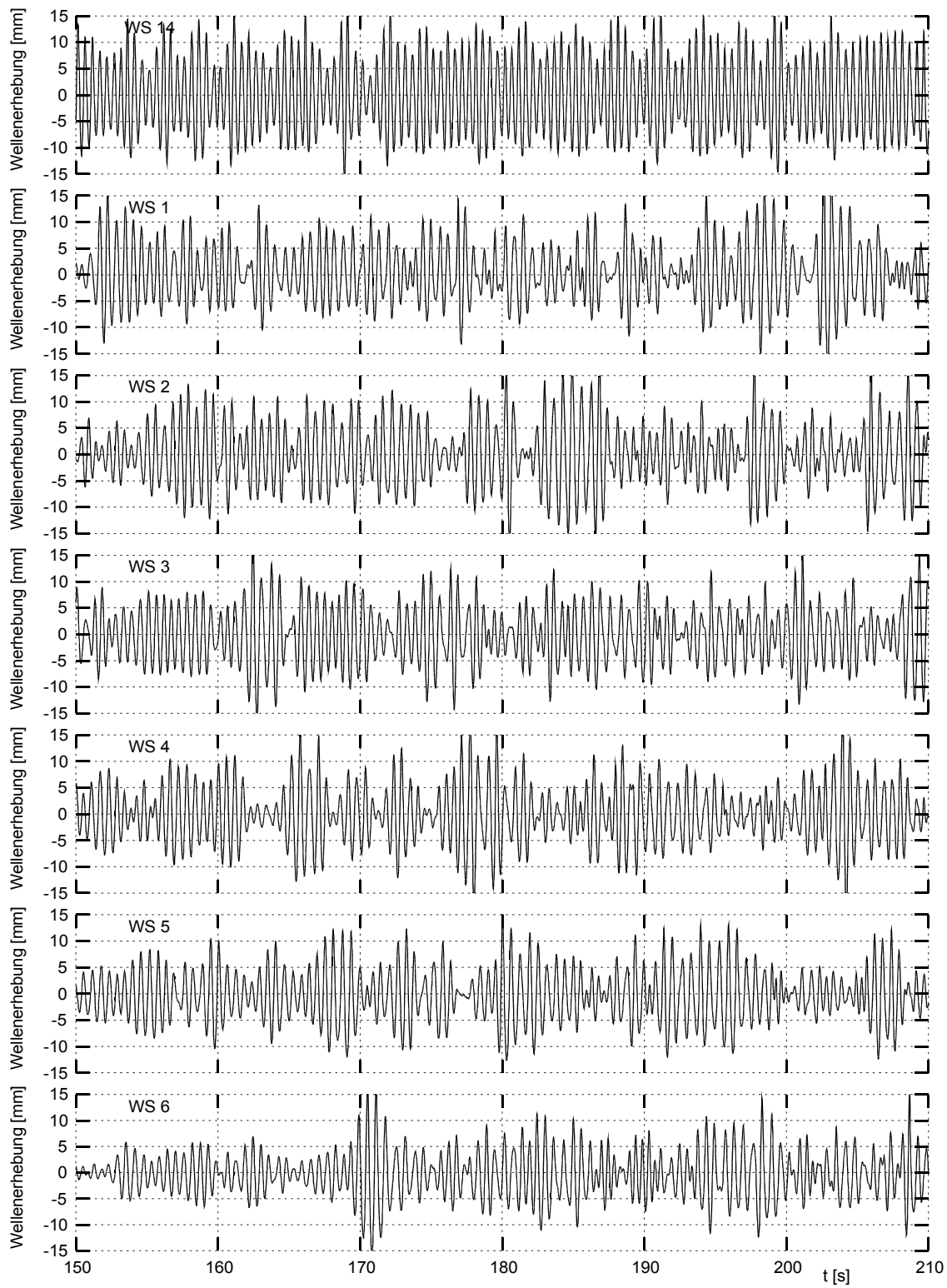


Abb. 5.12a Zeitschriebe der gemessenen Wellensonden  
 $(\omega = 12.566 \text{ s}^{-1}, h = 0.4 \text{ m}, a = 0.01 \text{ m})$

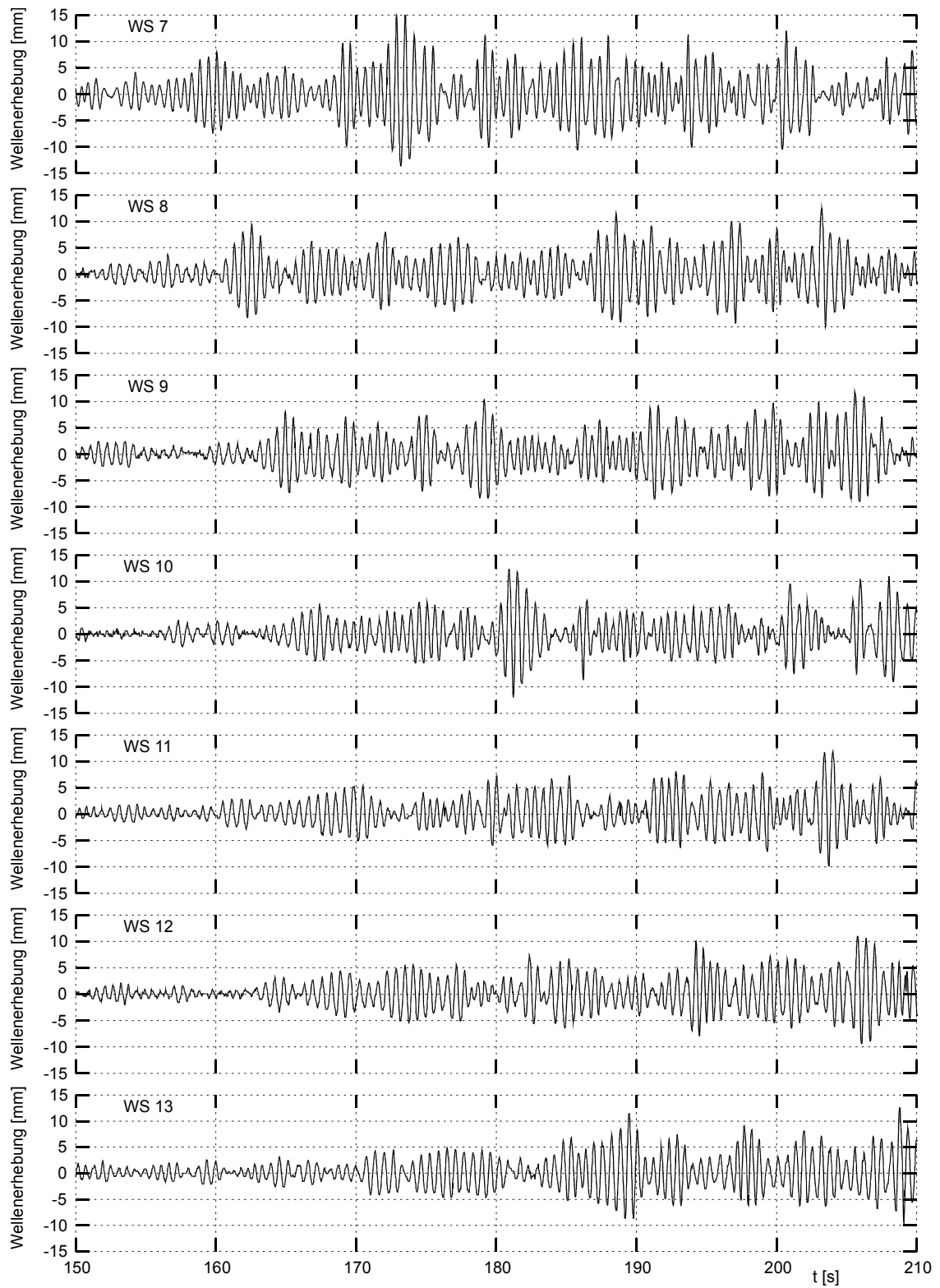


Abb. 5.12b Zeitschriebe der gemessenen Wellensonden  
( $\omega = 12.566 \text{ s}^{-1}$ ,  $h = 0.4 \text{ m}$ ,  $a = 0.01 \text{ m}$ )



### 5.1.2 Ausbreitung einer Solitonwelle in einem dreidimensionalen Rechengebiet

Die Ausbreitung von Solitonwellen wurde von fast allen Autoren untersucht, die sich mit der numerischen Lösung von Flachwassergleichungen beschäftigen, da es für die Wellenamplitude und Geschwindigkeit eine analytische Lösung gibt, mit der das numerische Verfahren verglichen werden kann. Hier soll die Ausbreitung einer Solitonwelle untersucht werden, die sich in einem Winkel von  $45^\circ$  zwischen den Koordinatenachsen ausbreitet. Dies ist ein grundsätzlicher Test für die Wellenausbreitung in der Ebene. Zudem soll untersucht werden, inwieweit die treppenförmige Randbedingung die Ausbreitung beeinflusst (s. a. Pedersen 1988).

Eine einzelne Solitonwelle mit dem Scheitelpunkt bei  $\eta_0$  und der Wellenamplitude  $\zeta_A$  kann durch die Wellenerhebung

$$\zeta_s(\eta) = \zeta_A \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\eta - \eta_0}{2} \sqrt{\frac{3\zeta_A}{h^3}} \right) \quad (5.2)$$

und die mittlere horizontale Geschwindigkeit

$$u_s(\eta) = \sqrt{\frac{g}{h} \left( \zeta - \frac{\zeta^2}{4h} + \frac{h^2 \zeta_{\eta\eta}}{6} \right)} \quad (5.3)$$

angenähert werden, mit

$$\zeta_{\eta\eta}(\eta) = \frac{3}{2} \zeta_A^2 \frac{2 \cosh^2 \left( \frac{\eta - \eta_0}{2} \sqrt{\frac{3\zeta_A}{h^3}} \right) - 3}{\cosh^4 \left( \frac{\eta - \eta_0}{2} \sqrt{\frac{3\zeta_A}{h^3}} \right) h^3}.$$

In dieser Simulation wurde in einem quadratischen Rechengebiet ein Kanal diagonal von links unten nach rechts oben gelegt, in dem als Anfangsbedingung eine Solitonwelle eingesetzt wurde. Die Koordinate  $\eta$  in (5.2) und (5.3) ist hier dann

$$\eta = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Damit ergibt sich als Anfangsbedingung für die Simulation im gesamten Rechengebiet:

$$\begin{aligned} \zeta(t=0, x, y) &= \zeta_s(\eta) \\ u(t=0, x, y) &= v(t=0, x, y) = u_s(\eta) \end{aligned}$$

An den offenen Rändern wurde die Sommerfeld-Randbedingung verwendet, an den schräg im Kanal laufenden Wänden die Tangentialflußbedingung. Die Solitonwelle hat

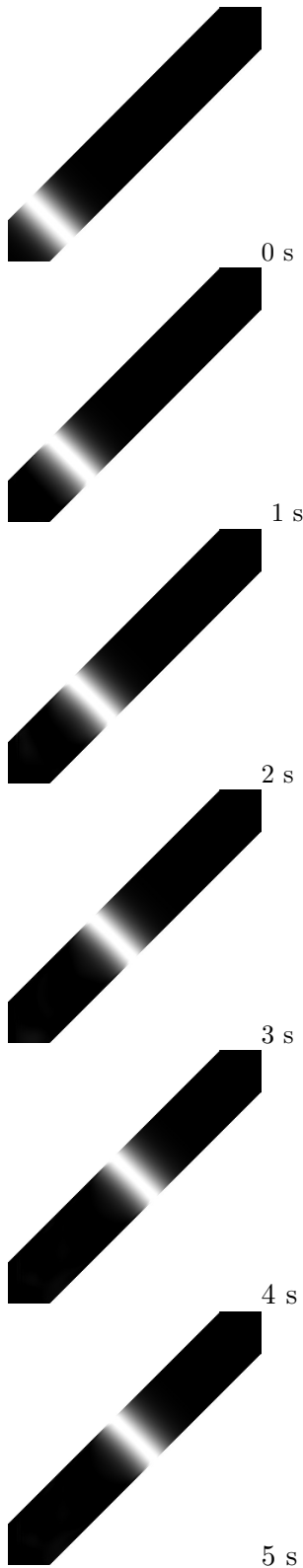


Abb. 5.13 Ausbreitung einer Solitonwelle im Kanal

eine Scheitelhöhe von 0.3 m bei einer Wassertiefe von 1 m. Die Gitterauflösung beträgt 0.1 m und die Dauer eines Zeitschritts 0.02 s.

Im Verlauf der Simulation, die in Abb. 5.13 wiedergegeben ist, in der sich die Solitonwelle fortbewegt, sind zwei Dinge zu beobachten: Zum einen verändert sich die Form der Solitonwelle nur unwesentlich. Darüber hinaus rufen die treppenstufenförmigen Berandungen keine Störungen hervor. Lediglich am Ende der Simulation, wenn die Solitonwelle nach 9 s das Rechengebiet verläßt, sind kreuzförmige Wellenmuster erkennbar, die sich von Ecken der Kanalwände an den Rechengebietsgrenzen ablösen (s. Abb. 5.14). Zur weiteren Validierung wurde die Ausbreitung der Solitonwelle zusätzlich mit einem zweidimensionalen Boussinesq-Löser simuliert. In Abb. 5.15 ist die zeitliche Entwicklung der beiden sehr gut übereinstimmenden Wellenschnitte dargestellt.

Diese Simulation zeigt, daß die einfache Diskretisierung im orthogonalen Gitter für praktische Rechnungen auch bei schräg verlaufenden Begrenzungen ausreicht.

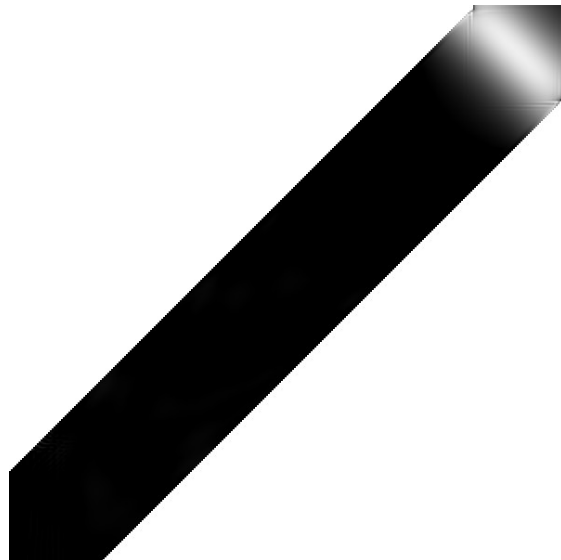


Abb. 5.14 Störungen treten am Rand des Rechengebiets auf, wenn die Solitonwelle das Rechengebiet nach 9 s verläßt

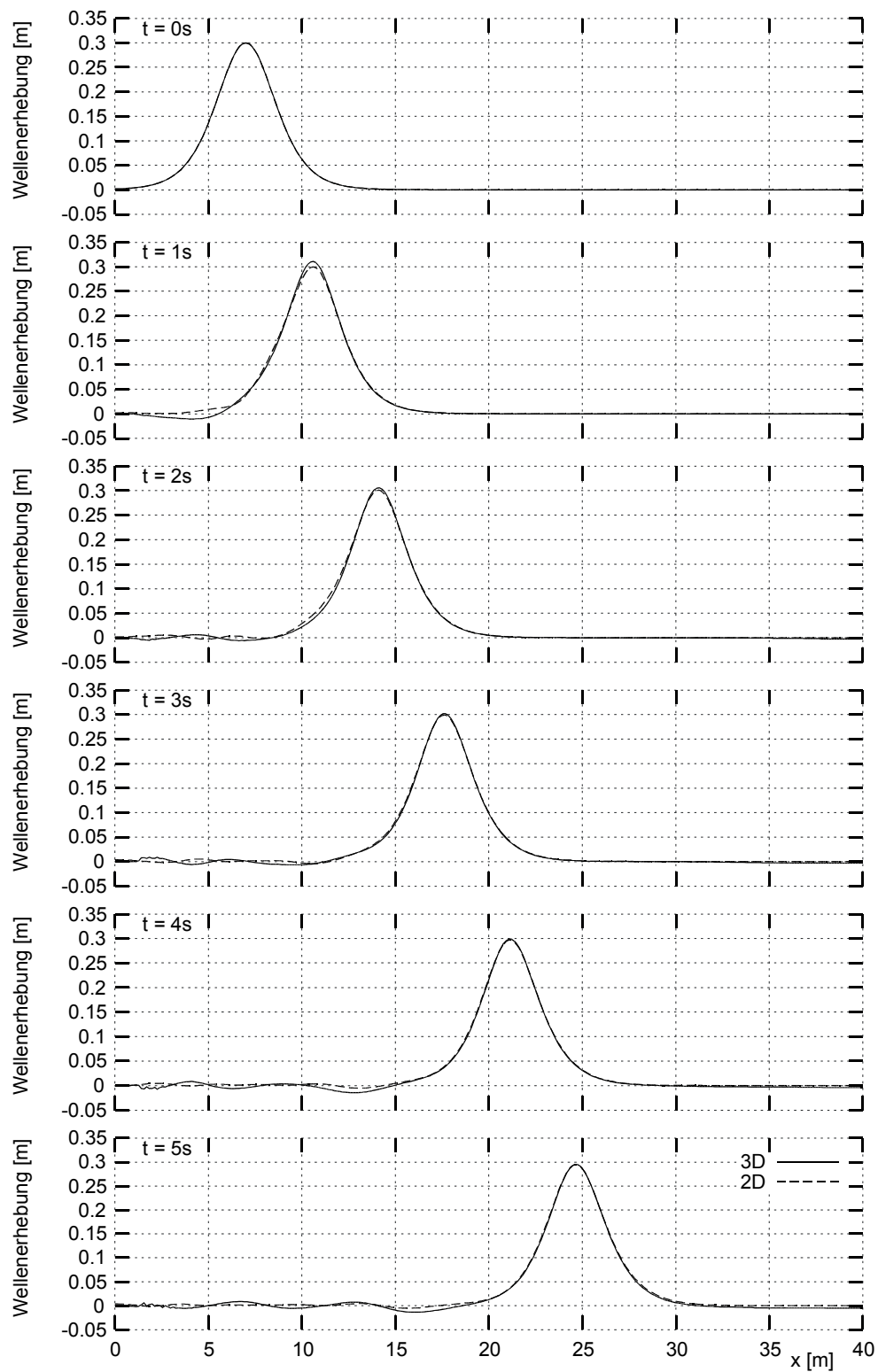


Abb. 5.15: Zeitreihe der Wellenschnitte durch die Solitonwelle  
(Vergleich zwischen 3D- und 2D-Berechnung)

### 5.1.3 Wellenbildung durch ein Küstenmotorschiff im Kanal

Im nächsten Schritt soll die Wellenbildung durch ein mittels der Schlankkörpertheorie modelliertes Schiff in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt untersucht werden. Als Schiff wurde hier ein Küstenmotorschiff gewählt. Es fuhr mit einer Geschwindigkeit von 19 km/h. Die Wassertiefe betrug 5 m; der Kanal hatte eine Breite von 155 m. Das Schiff hatte eine Länge von 87.7 m, eine Breite von 11.4 m, einen Tiefgang von 2.5 m und eine Verdrängung von  $V = 2108 \text{ m}^3$ . Die Gitterweite betrug in  $x$ - und  $y$ -Richtung jeweils 1 m.

In Abb. 5.16 ist das Wellenbild dargestellt. Es ist ein typisches Beispiel für ein unterkritisches Wellensystem mit divergenten Wellen und Querwellen. Auch das primäre Wellensystem ist sehr gut zu erkennen. In Abb. 5.17 sind die gemessenen und berechneten Wellenschnitte in fünf Abständen von der Kurslinie dargestellt. Die Wellensonden A–E befanden sich 5.92 m, 11.84 m, 15.79 m, 23.69 m und 31.58 m neben der Schiffsmitte. Dabei zeigt sich, daß die Übereinstimmung der berechneten mit den gemessenen Wellen mit größer werdendem Abstand vom Schiff besser wird. Das gilt sowohl für die primäre Absunkwelle als auch für das sekundäre Wellensystem. Die deutlichen Fehler im Wellenbild nahe des Schiffs sind auf die vereinfachte Beschreibung der Rumpfgeometrie durch die Schlankkörpertheorie zurückzuführen. Besonders das getauchte Spiegelheck führt zu sichtbaren Fehlern im Heckwellensystem. Die Wellenausbreitung selbst wird dagegen gut berechnet. Zahlreiche weitere Beispiele, auch für kritische und überkritische Geschwindigkeiten, geben Henn (1999) und Jiang (2001).

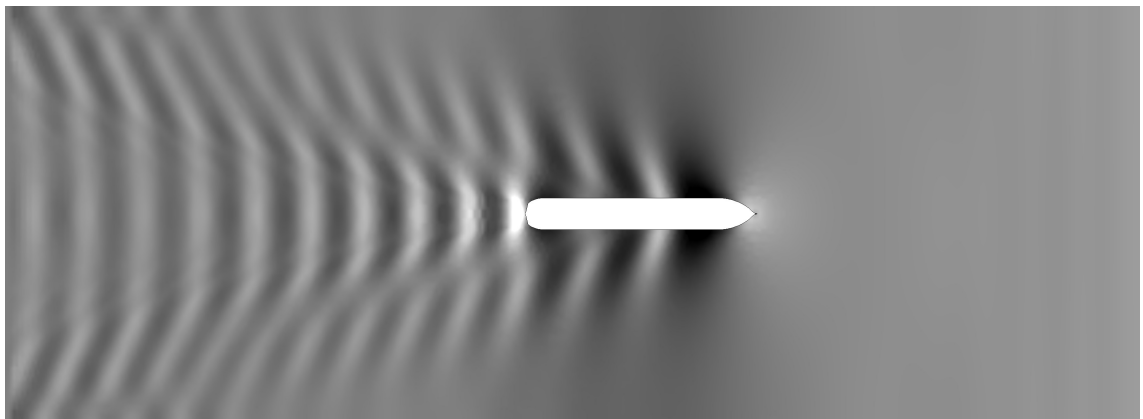


Abb. 5.16 Wellenbild eines Küstenmotorschiffs bei einer Geschwindigkeit von 19 km/h und einer Wassertiefe von 5 m

Sofern die Wellenbildung, bzw. das Wellensystem in Schiffsnähe genau berechnet werden soll, sind andere Verfahren, wie z. B. potentialtheoretische Paneelverfahren, bei entsprechend kleinem Rechengebiet vorzuziehen. Wenn allerdings die Wellen in einem größeren Abstand vom Schiff von Interesse sind, kann die Schlankkörpertheorie sehr gut zur Modellierung der Verdrängungswirkung des Schiffs verwendet werden.

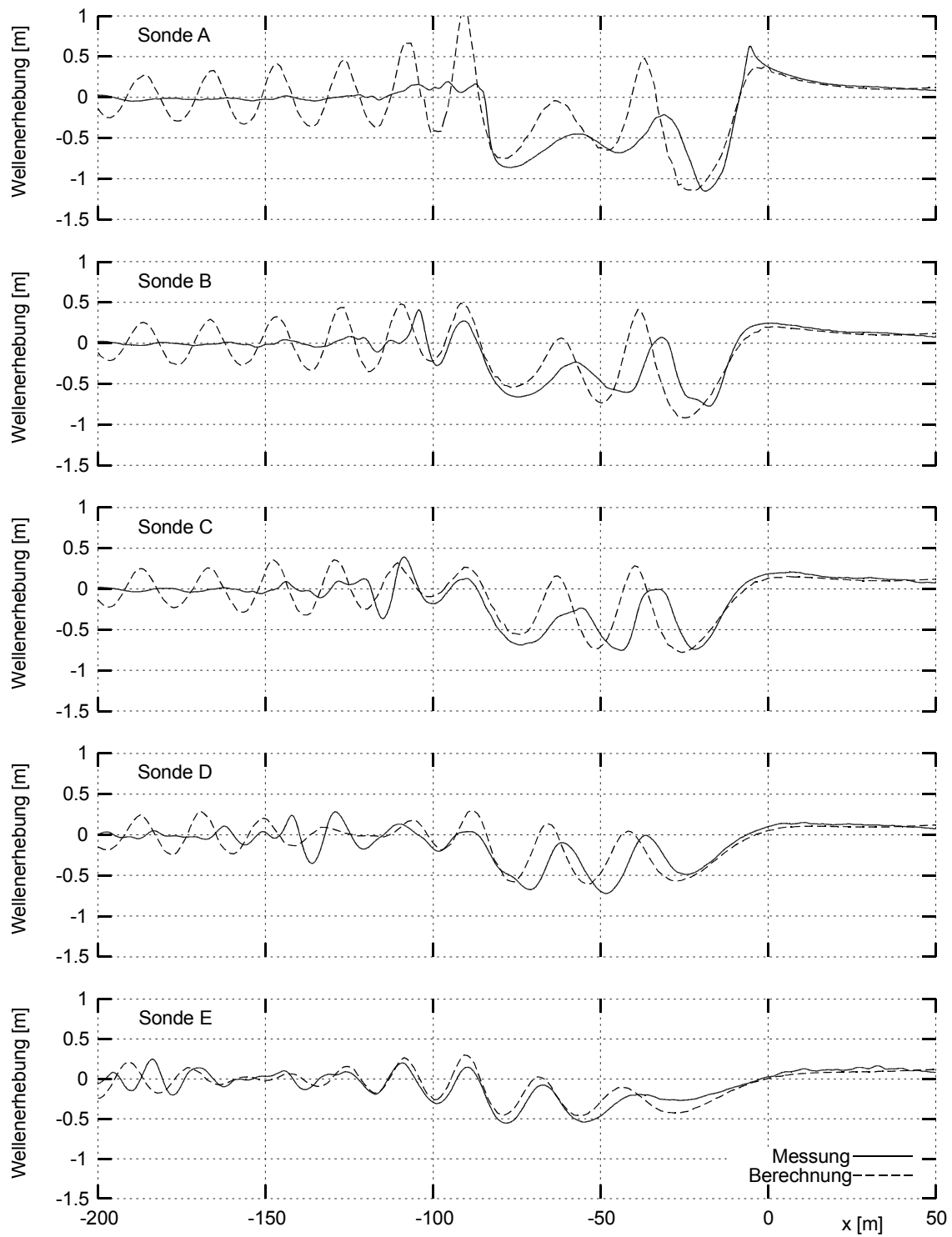


Abb. 5.17 Vergleich der gemessenen und berechneten Wellenschnitte des Küstenmotorschiffs bei einer Geschwindigkeit von 19 km/h und einer Wassertiefe von 5 m

Sie ist numerisch einfach zu handhaben und erlaubt die Berücksichtigung der dynamischen Schwimmelage durch Berechnung der aktuell benetzten Spantflächen nach jedem Zeitschritt.

#### 5.1.4 Wellenbildung durch ein Containerschiff in der Elbe

In dem nächsten Validierungsbeispiel wird die Fahrt eines Panmax-Containerschiffs in der Elbe simuliert. Dieser Fall wurde bei der Bundesanstalt für Wasserbau (BAW) in Hamburg im Modellversuch untersucht. Die Messwerte der Wellensonden wurden von der BAW dankenswerterweise zur Verfügung gestellt. Im Gegensatz zum vorherigen Fall ist hier der Boden nicht eben; vielmehr handelt es sich um die Nachbildung eines Abschnitts der Elbe. Auch ist das Rechengebiet mit einer Ausdehnung von  $4900 \text{ m} \times 800 \text{ m}$  deutlich größer. Entsprechend der Schiffslänge von  $297 \text{ m}$  wurde die Gitterweite auf  $5 \text{ m}$  vergrößert. Abb. 5.18 zeigt eine Isohypsendarstellung der Bodentopographie. Dargestellt ist nur der Ausschnitt mit der natürlichen Bodentopographie. Das Rechengebiet wurde nach rechts verlängert, damit die divergenten Wellen innerhalb der Simulationszeit auch die äußere Wellensonde W8 erreichen konnten. Das Schiff wird hier wieder mit der Schlankkörpertheorie modelliert. Die weiße Linie in Abb. 5.18 zeigt die Kurslinien des Schiffs, es fährt mit einer Geschwindigkeit von  $7.922 \text{ m/s}$  ( $15.4 \text{ kn}$ ) von links nach rechts.

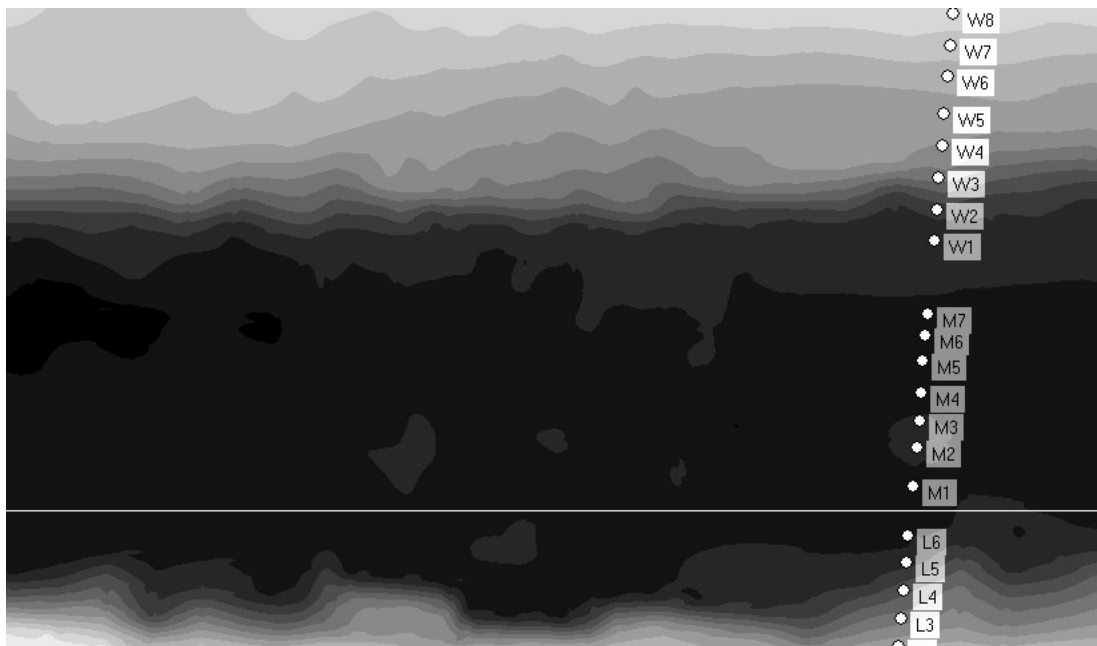


Abb. 5.18 Bodentopographie des untersuchten Elbe-Abschnitts. Das gesamte Rechengebiet ist  $4900 \text{ m}$  lang und  $800 \text{ m}$  breit; die Gitterweite beträgt  $5 \text{ m}$ . Die Kurslinie des Schiffs ist weiß eingezeichnet.

Die gemessenen und berechneten Zeitschriebe für alle Wellensonden L2–W8 sind in den Abb. 5.19a–d aufgetragen. Auf der Backbordseite (Sonden M1–W8) ist eine sehr exakte Berechnung der primären Welle bis an den Rand des Gebiets an der äußersten Sonde zu erkennen. Dagegen zeigt sich auf der Steuerbordseite eine starke Überhöhung vor allem der Absunkwelle bereits an der Sonde L6. Dies kann durch eine, wie bereits im vorangegangenen Abschnitt dargestellte, Überhöhung der Wellen am Schiff durch die Schlankkörpertheorie erklärt werden, die sich hier verstärkt, weil das Schiff sehr nahe um Ufer fährt und damit die überhöhten Wellen schnell in flaches Gebiet kommen, wo sie sich weiter aufsteilen. Weiterhin ist zu beobachten, daß sich die im Modellversuch gemessenen, sehr kurzen sekundären Wellen nicht ausbilden. Stattdessen bildet sich in der Berechnung ein großes Wellensystem am Spiegelheck, daß allerdings stark gedämpft wird und die äußersten Sonden nicht mehr erreicht.

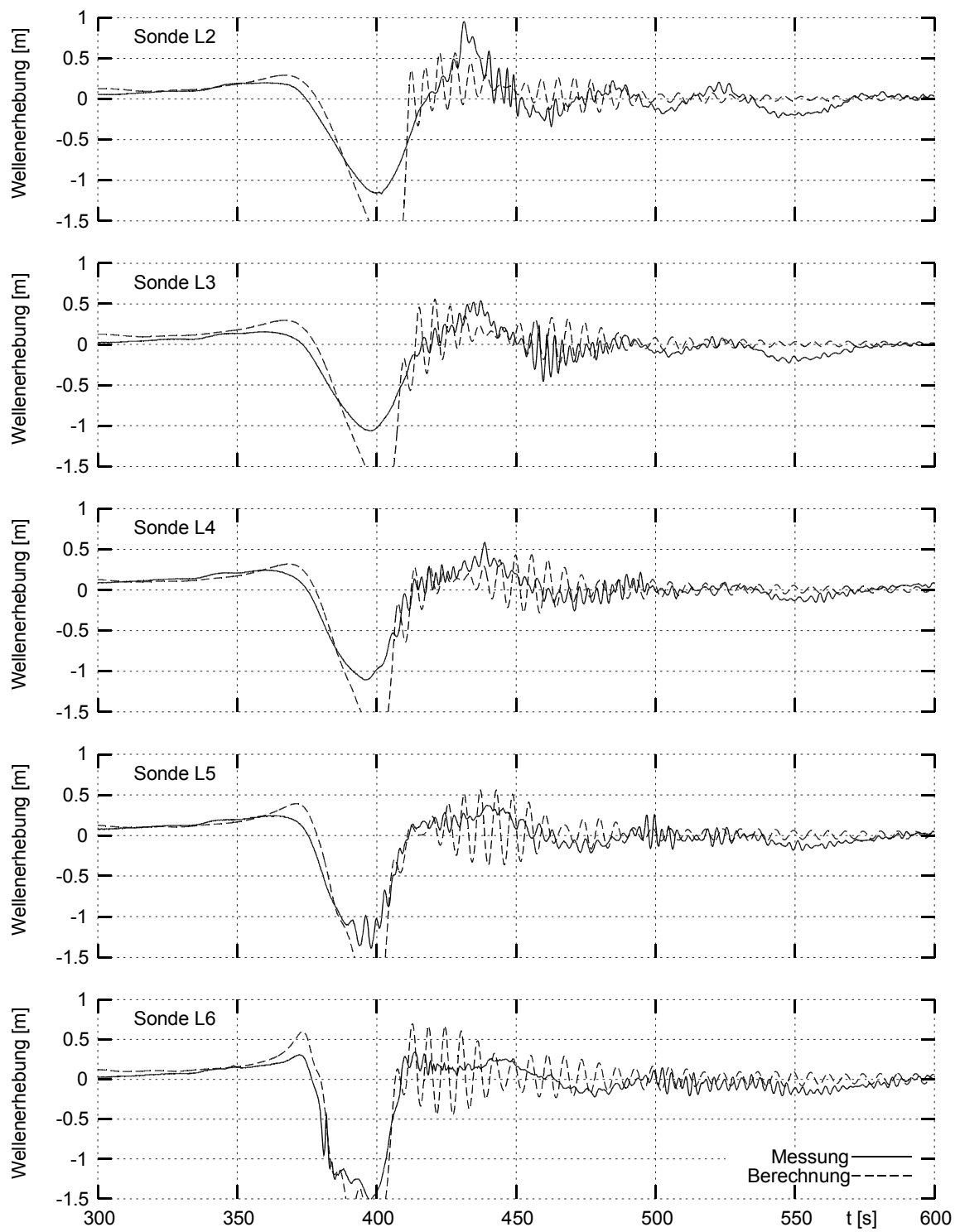


Abb. 5.19a Gemessene und berechnete Zeitschriebe der Wellensonden



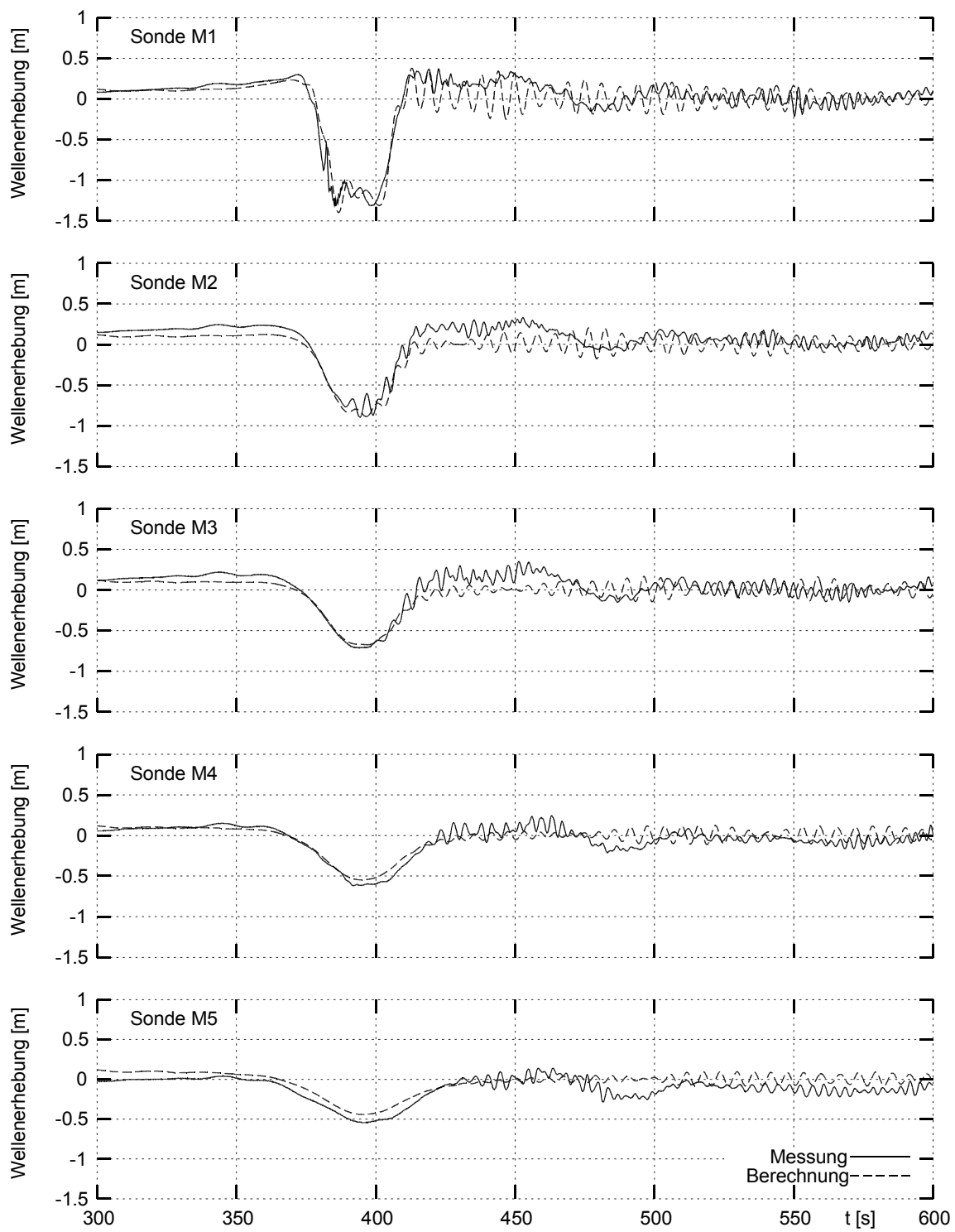


Abb. 5.19b Gemessene und berechnete Zeitschriebe der Wellensonden

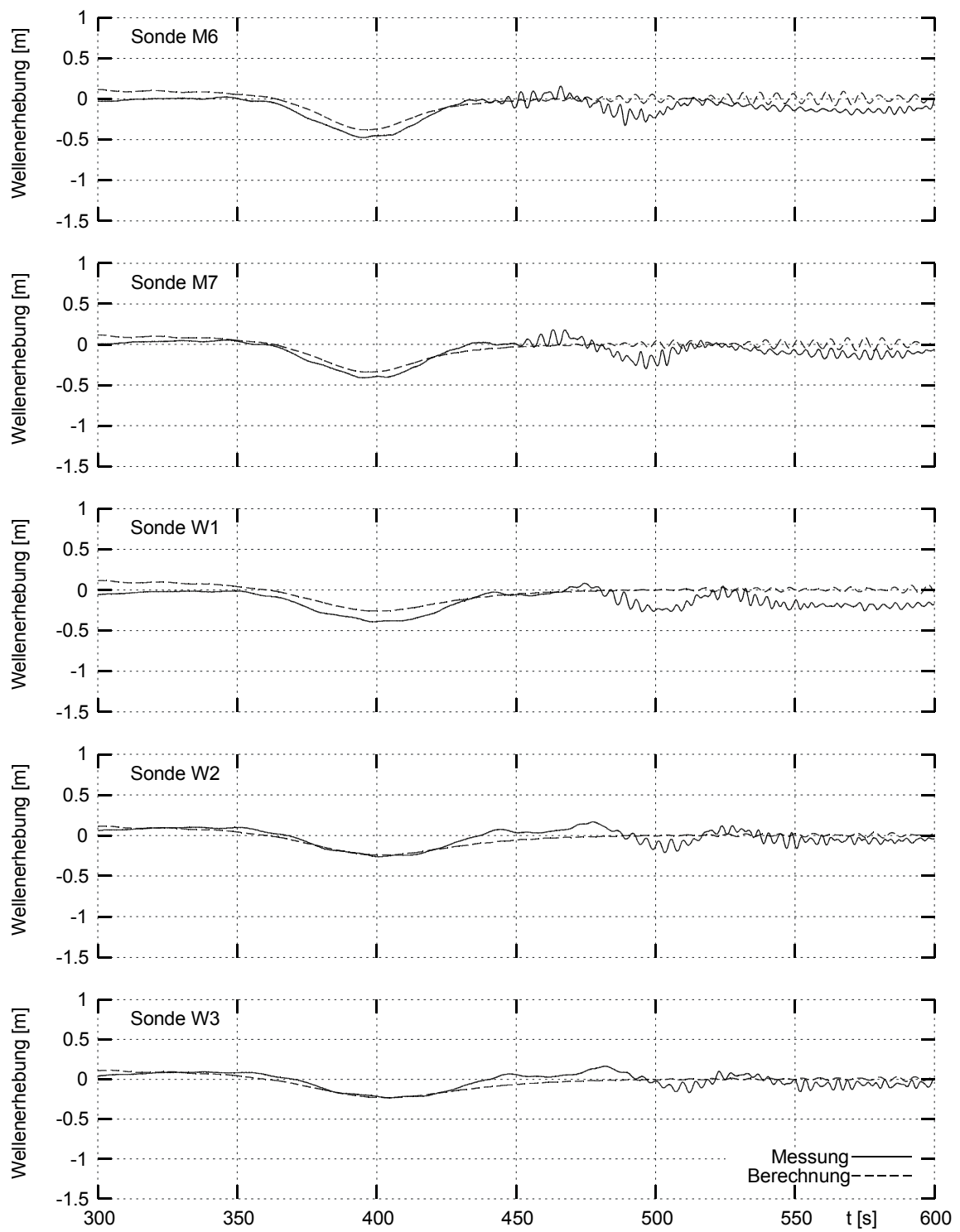


Abb. 5.19c Gemessene und berechnete Zeitschriebe der Wellensonden

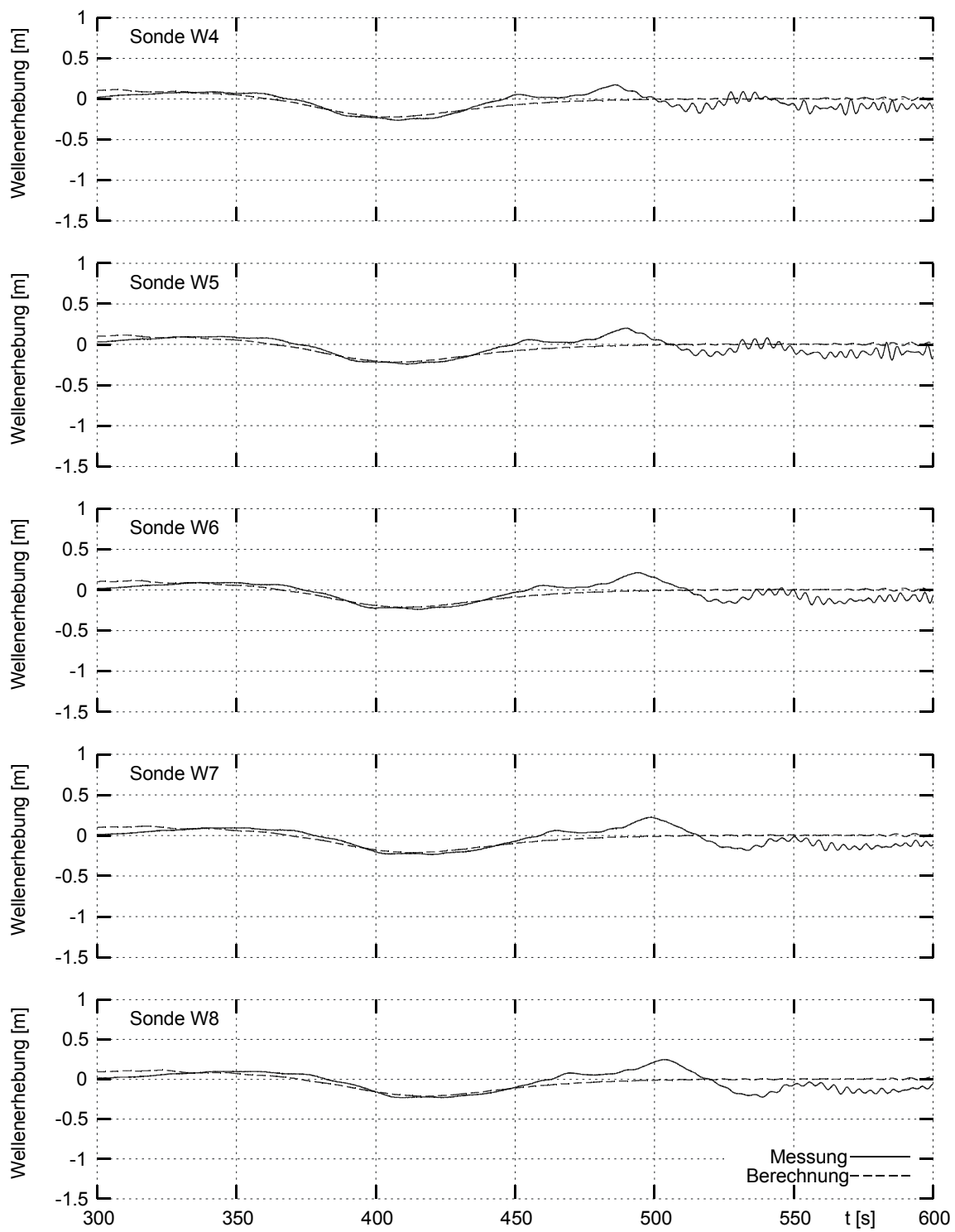


Abb. 5.19d Gemessene und berechnete Zeitschriebe der Wellensonden

### 5.1.5 Strömung über eine getauchte Buhne

Zur Anwendung der erweiterten Boussinesq-Gleichungen von Chen und Zou wird eine zweidimensionale Gerinneströmung untersucht (vgl. Abb. 5.20). Vom linken Rand, weit weg von der Buhne, strömt das Wasser mit einer über der Wassertiefe  $h_0$  konstanten Geschwindigkeit  $u_c$  ein. Auf der Wasseroberfläche über dem Buhnenkopf liegt der Ursprung des Koordinatensystems  $O_{xz}$ .  $h(x)$  bezeichnet die lokale Tiefe des Bodens bezogen auf den ungestörten Wasserspiegel,  $H(x)$  die lokale Höhe des Wasserspiegels über dem Boden. Die Wellenerhebung ist dann die Differenz zwischen  $H$  und  $h$ , also  $\zeta = H - h$ .

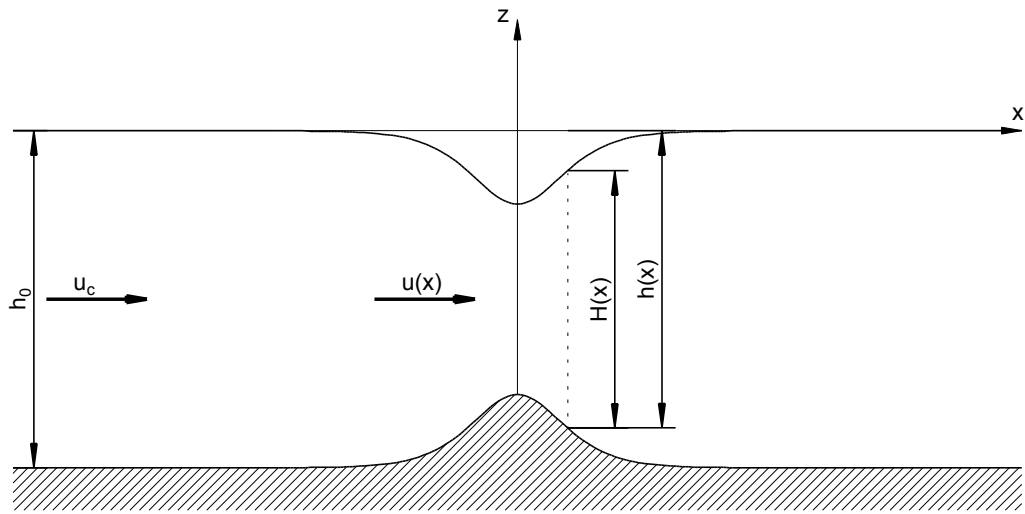


Abb. 5.20: Zweidimensionale Gerinneströmung

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und der Bernoulli-Gleichung lassen sich nun die Höhe des Wasserstands  $H(x)$  und die Geschwindigkeit  $u(x)$  an jeder Stelle  $x$  berechnen:

$$u_c h_0 = u H \quad (5.4)$$

$$\frac{u_c^2}{2} = \frac{u^2}{2} + g(H - h) \quad (5.5)$$

Daraus wird mit  $H = \frac{u_c}{u} h_0$

$$u^3 - [u_c^2 + 2gh]u + 2gu_c h_0 = 0 \quad (5.6)$$

oder mit  $u = u_c \frac{h_0}{H}$

$$H^3 - \left(\frac{u_c^2}{2g} + h\right)H^2 + \frac{u_c^2 h_0^2}{2g} = 0. \quad (5.7)$$

Aus beiden Wegen ergeben sich also die kubischen Bestimmungsgleichungen (5.6) und (5.7), die nur dann eine reelle Lösung haben, wenn die lokale Tiefenfroudezahl  $\sqrt{u/Hg}$  nicht eins wird.

Zur Validierung der Strömungswirkung und zum Vergleich der verschiedenen Gleichungen wurde im Entwicklungszentrum für Schiffstechnik und Transportsysteme (DST) ein Versuch durchgeführt. Im großen Tank wurde eine Bodenwelle quer zur Tankrichtung über die gesamte Breite installiert, so daß sich die Wassertiefe als Funktion der Längskoordinate  $x$  schreiben läßt:

$$h(x) = h_0 - 0,12 \, m \left( \tanh^2\left(\frac{10}{m}x\right) - 1 \right) \quad (5.8)$$

Bei einem Ruhewasserstand  $h_0 = 0,3 \, m$  wurde am linken Rand eine Strömung von  $0,4 \, m/s$  eingestellt. Im Versuch wurden die Bodendrucke an fünf Stellen gemessen. Weiterhin wurde die Wellenerhebung mit fünf Wellensonden gemessen, die am Schleppwagen über die Tankbreite gleichmäßig verteilt und in Längsrichtung kontinuierlich verfahrbar waren. Abb. 5.21 zeigt den Versuchsaufbau.

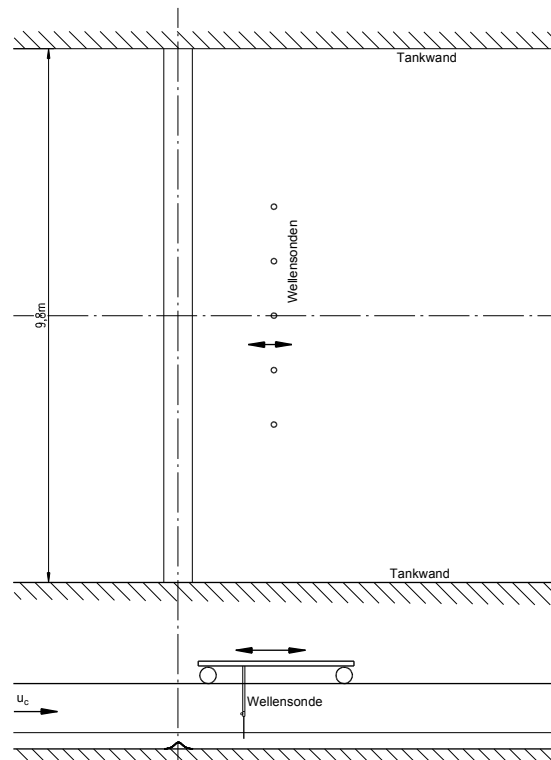


Abb. 5.21 Versuchsaufbau im DST zur Messung der Wellenerhebung hinter der angeströmten getauchten Buhne

Der Versuch wurde numerisch simuliert. Da die Wellenschriebe aus dem Versuch zeigen, daß der Wandeinfluß in der Tankmitte vernachlässigbar ist, wurde die numerische Simulation zweidimensional durchgeführt. In Abb. 5.22 sind die Ergebnisse aus Versuch und Simulationen dargestellt. Bevor das von links einströmende Wasser den Buhnenkopf erreicht hat, beginnt sich der Wasserspiegel zu senken und erreicht sein Minimum hinter dem Buhnenkopf. Hier entstehen relativ stark gedämpfte Wellen. Im Abstrom bleibt der Wasserspiegel niedriger als im Zustrom. Die Absenkung des Wasserspiegels über der Buhne ist auch in den Simulationen mit den Gleichungen von Zou und Chen zu finden. Während die Wellen hinter der Buhne bei Zou kaum erkennbar sind, treten bei Chen größere Wellen auf. Diese sind aber im Vergleich zur Messung deutlich kleiner und kürzer. Dagegen erreicht die Simulation mit dem Euler-Löser MOUSE eine sehr gute Übereinstimmung mit der Messung.

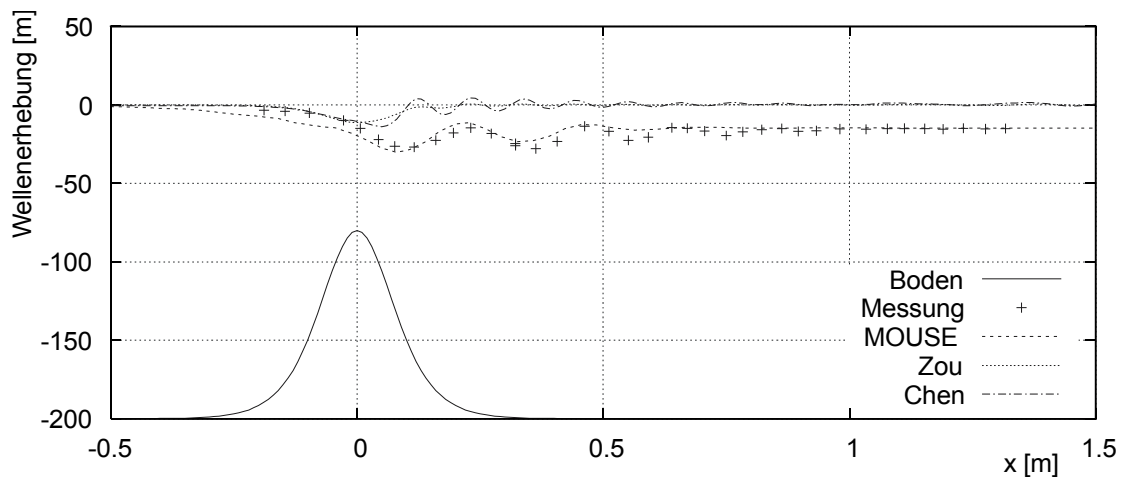


Abb. 5.22: Wellenbildung hinter einer überströmten Buhne

Dieses Beispiel zeigt, daß die erweiterten Gleichungen zwar qualitativ die Wirkung einer Strömung über einer Bodenstörung erfassen, der quantitative Vergleich aber nicht zufriedenstellend ist. Wie in Abb. 5.23 zu sehen ist, sind die tatsächlichen Verhältnisse noch komplexer. Während in Abb. 5.22 nur die zeitlichen Mittelwerte der Wellenerhebungen dargestellt sind, ist im Versuch eine stark instationäre Strömung zu beobachten. Besonders in Binnengewässern treten aber sehr häufig schießende Strömungen (vgl. Abb. 5.24) auf, in denen die Strömung über der Buhne von unter- zu überkritisch wechselt. Hier können die Flachwassergleichungen nicht mehr angewendet werden. Ob sich weitere Erweiterungen für Gleichungen vom Boussinesq-Typ finden lassen, die solche Strömungsfälle berücksichtigen, muß in dieser Arbeit ungeklärt bleiben. Eine weitere Anwendung für die Boussinesq-Gleichungen in Zusammenhang mit Strömung wird in 5.1.7 dargestellt.



Abb. 5.23 Instationäres Wellenbild hinter der überströmten Bühne



Abb. 5.24 Schießende Strömung über einer sehr flach getauchten Bühne

### 5.1.6 Trimm und Absenkung

In der Verdrängerfahrt erfährt das Schiff, hervorgerufen durch das eigene primäre Wellensystem, eine parallele vertikale Absenkung gegenüber dem Ruhezustand. Außerdem vertrimmt das Schiff bei kleinen Geschwindigkeiten vorlastig, bei größeren Geschwindigkeiten ab etwa  $F\eta_h = 0.75$  hecklastig. Besonders bei beschränkter Wassertiefe spielt die dynamische Schwimmlage eine große Rolle, wenn die Schiffsführung entscheiden muß, wie tief sie das Schiff abladen darf, bzw. wie schnell das Schiff fahren darf, ohne eine Grundberührung zu riskieren. Hierbei spielt der Begriff *Squat* eine zentrale Rolle, der die sich aus der Kombination von Absenkung und Trimm ergebende maximale Tiefgangsvergrößerung – meist am Bug oder Heck – bezeichnet.

Zur Ermittlung des Squat gibt es eine Reihe von empirischen Näherungsformeln, z. B. von Barrass (1978) oder Römisch (1993). Die dynamische Schwimmlage läßt sich allerdings auch aus den Berechnungen mit Boussinesq-Gleichungen in Kombination mit der Schlankkörpertheorie recht genau ermitteln.

Der Trimm  $\theta$  und die Absenkung  $z_v$  ergeben sich aus den hydrostatischen Kräfte- und Momentengleichgewichten

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} A(x, \theta, z_v, \zeta) dx &= \frac{m_s}{\rho} \\ \int_{-L/2}^{L/2} A(x, \theta, z_v, \zeta) x dx &= 0 \end{aligned}$$

in dem Trimm und Absenkung implizit erscheinen. Sofern die dreidimensionale Rumpfgeometrie bekannt ist, können diese beiden Gleichungen iterativ gelöst werden. Bei der Berechnung der aktuellen lokalen Spantflächen kann die Verformung der Wasseroberfläche am Rumpf berücksichtigt werden, was vor allem in Hinblick auf das primäre Wellensystem sehr wichtig ist.

Ist von dem zu untersuchenden Schiffsrumpf nur die Spantarealkurve und die Form der Wasserlinie verfügbar, können Trimm und Absenkung anhand einer linearisierten Form berechnet werden:

$$z_v = \frac{\int_L x B dx \int_L \zeta x B dx - \int_L \zeta B dx \int_L x^2 B dx}{\int_L B dx \int_L x^2 B dx - \left[ \int_L x B dx \right]^2}$$

und



$$\theta = \frac{\int_L B x dx \int_L \zeta B dx - \int_L B dx \int_L \zeta B x dx}{\int_L B dx \int_L x^2 B dx - \left[ \int_L x B dx \right]^2}$$

wobei  $B(x)$  die lokale Breite der Wasserlinie und  $\zeta(x)$  die lokale Wellenerhebung an der Außenhaut ist. Bei weit ausladenden oder einfallenden Spanten in Verbindung mit großen Wellen am Rumpf ist diese Form nicht mehr gültig.

Als Beispiel zur Berechnung der dynamischen Schwimmlage wurde die Fahrt eines Binnengüterschiffs im Kanal mit rechteckigem Querschnitt gewählt. Dieser Fall kann sehr genau im Modellversuch nachgefahren werden. Abb. 5.25 zeigt den Vergleich der gemessenen und berechneten Trimm und Absenkung als Funktion der Tiefenfroudezahl für verschiedene Verhältnisse von Wassertiefe zu Tiefgang. Die Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung. Einzig bei einem Verhältnis  $h/T = 1.5$  findet sich für Tiefenfroudezahlen ab 0.6 ein deutlicher Unterschied zwischen der Messung und der Berechnung im Trimm.

Im allgemeinen kann mit dem Flachwasserverfahren die dynamische Schwimmlage ausreichend genau berechnet werden. Schwierigkeiten gibt es im  $F_{r_h}$ -Bereich zwischen 0.75 und 0.85, wo eine abrupte Änderung vom vor- zum hecklastigen Trimm stattfindet. Diese ist mit einer starken Widerstandserhöhung verbunden und sollte deshalb im Schiffsbetrieb vermieden werden.

Außerdem ist festzustellen, daß mit zunehmendem Versperrungsverhältnis in einem Kanal Trimm und Absenkung unterschätzt werden. Dies liegt daran, daß die tatsächliche Verdrängungswirkung des Schiffs nur durch eine vertikal gemittelte Störgeschwindigkeit quer zur Anströmrichtung hervorgerufen wird. Obwohl die integrierte Verdrängungswirkung des Schiffskörpers exakt erfaßt wird, wird der Fluß durch den Schiffskörper und die Entstehung physikalisch falscher Wellen unter dem Rumpf dadurch nicht verhindert, was zur Folge hat, daß die Schwimmlage falsch berechnet wird. Zur Berechnung der Absenkung und des Trimm in sehr engen Kanälen, z. B. Schleusen- ein- und -ausfahrt eignet sich dann besser eine eindimensionale Modellierung der Strömung (s. Chen 2001).

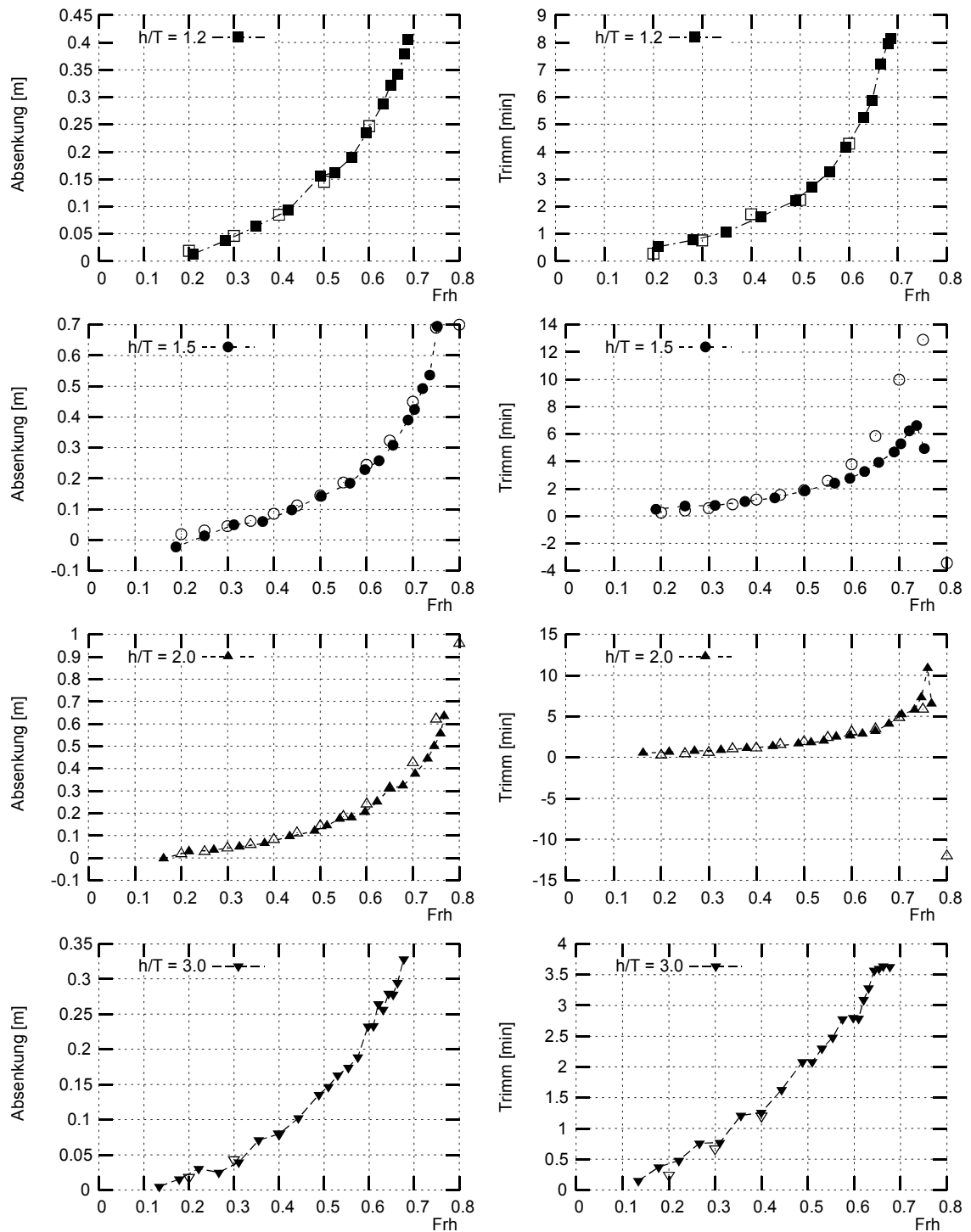


Abb. 5.25 Trimm und Absenkung eines Binnengüterschiffs bei Fahrt in einem Kanal (gefüllte Symbole Messung, offene Symbole Berechnung)

### 5.1.7 Einfluß der Bodenreibung auf die Wellenbildung

Die Wirkung der Bodenreibung, deren mathematische Modellierung im Abschnitt Fehler: Referenz nicht gefunden beschrieben wurde, wird anhand eines Binnengüterschiffs untersucht. Das 110 m lange Schiff fährt in einem 160 m breiten Kanal. Die Wassertiefe beträgt 3.5 m, der Tiefgang 2.8 m. Es wurden drei verschiedene Fälle untersucht:

	$V_{\text{Schiff}}$ [km/h]	$V_{\text{Strömung}}$ [km/h]
ohne Strömung	12	0
Bergfahrt	6	-6
Talfahrt	18	6

Die Geschwindigkeiten beziehen sich auf das erdfeste Koordinatensystem. Die Relativgeschwindigkeit des Schiffs zum Wasser an der Oberfläche betrug also immer 18 km/h. In Abb. 5.27 sind die Wellenschnitte für die drei Fälle an fünf verschiedenen seitlichen Abständen zur Schiffsmittle dargestellt. Hier ist deutlich zu erkennen, daß das primäre Wellensystem bei Bergfahrt kleiner und bei Talfahrt größer ist als bei Fahrt ohne Strömung.

Der Vergleich der berechneten mit den gemessenen Wellenschnitten für die drei Fälle ist in den Abbildungen 5.28, 5.29 und 5.30 dargestellt. Es ist zunächst eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung zu finden. Deutliche Unterschiede zwischen Messung und Berechnung finden sich im Bug- und Heckbereich in der Nähe des Schiffs. Vor allem bei den Bodendruckdosen bei 0 m und 3.45 m, mit denen die Wellen gemessen wurden, ist keine gute Übereinstimmung zu erwarten, weil sich diese Sonden unter dem Schiff befinden. Die Schlankkörpertheorie liefert besonders in Schiffsnahe für sehr völlige Schiffsformen falsche Wellenerhebungen, da sie nicht die exakte Schiffsform sondern nur deren Verdrängungswirkung berücksichtigt. Die Spantarealkurven von Binnenschiffsformen haben an den Schiffsenden sehr große Steigungen, während die Ableitung der Spantflächen im langen, parallelen Mittelschiff null ist. Die übertriebenen Bug- und Heckwellen, die ein stark überhöhtes sekundäres Wellensystem erzeugen, haben ihren Ursprung ebenfalls in der Modellierung des Schiffs durch die Schlankkörpertheorie. Mit größer werdendem Abstand vom Schiff wird die Übereinstimmung der berechneten mit den gemessenen Wellen immer besser. Insbesondere der Einfluss der Strömung auf die Wellenausbreitung wird sehr gut erfasst.

Bei diesen Berechnungen wurden die Gleichungen (2.42)–(2.44) verwendet. Auf eine erweiterte Modellierung der Strömungswirkung wurde aufgrund des ebenen Bodens also verzichtet. Die Ergebnisse zeigen dann auch, daß die im Versuch gefundene Abschwächung der Wellen bei Bergfahrt und Vergrößerung der Wellen bei Talfahrt sehr exakt berechnet werden können.

Für den Reibungsbeiwert  $c_F$  wird in allen Berechnungen ein Wert von 0.003 angenommen. Dies ist ein für die gegebene Geschwindigkeit, Bodenrauhigkeit und Tanklänge plausibler Wert, der sich in einer Untersuchung von Schlichting (1965) wiederfindet.

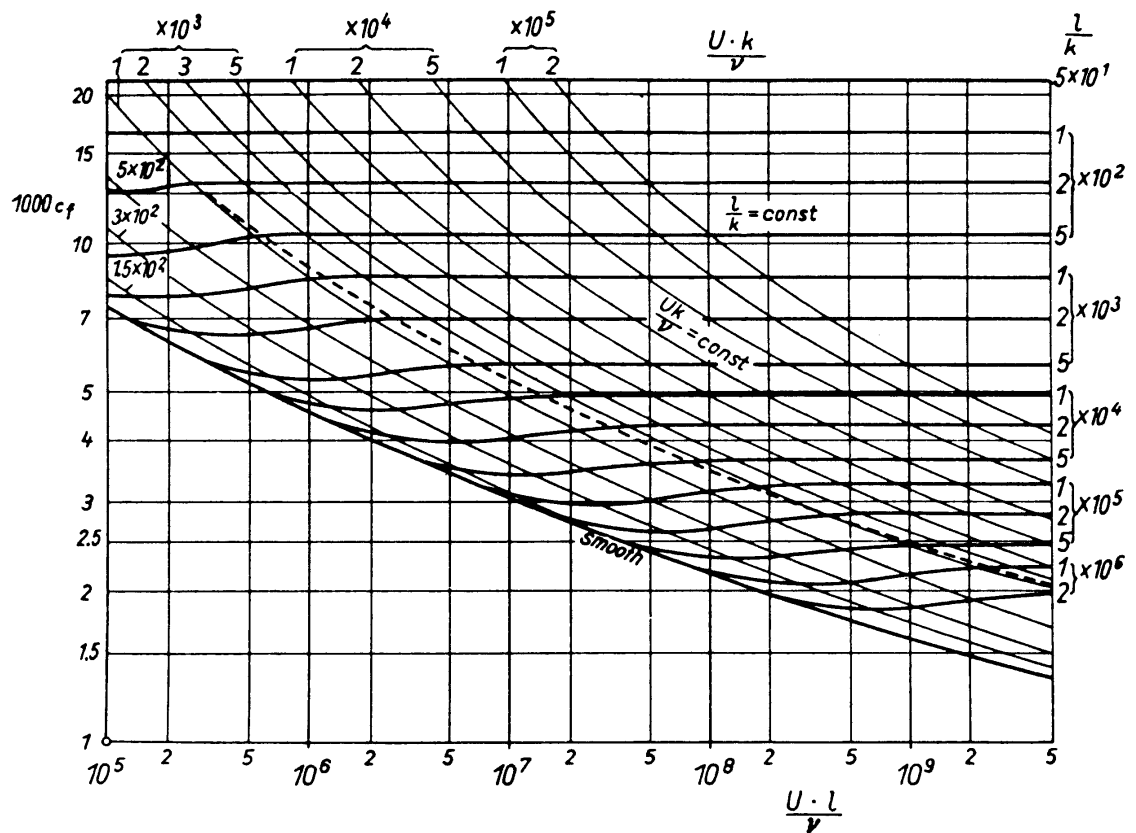


Abb. 5.26 Reibungsbeiwert in Abhängigkeit von Reynoldszahl und Rauigkeit (aus Schlichting, 1965)

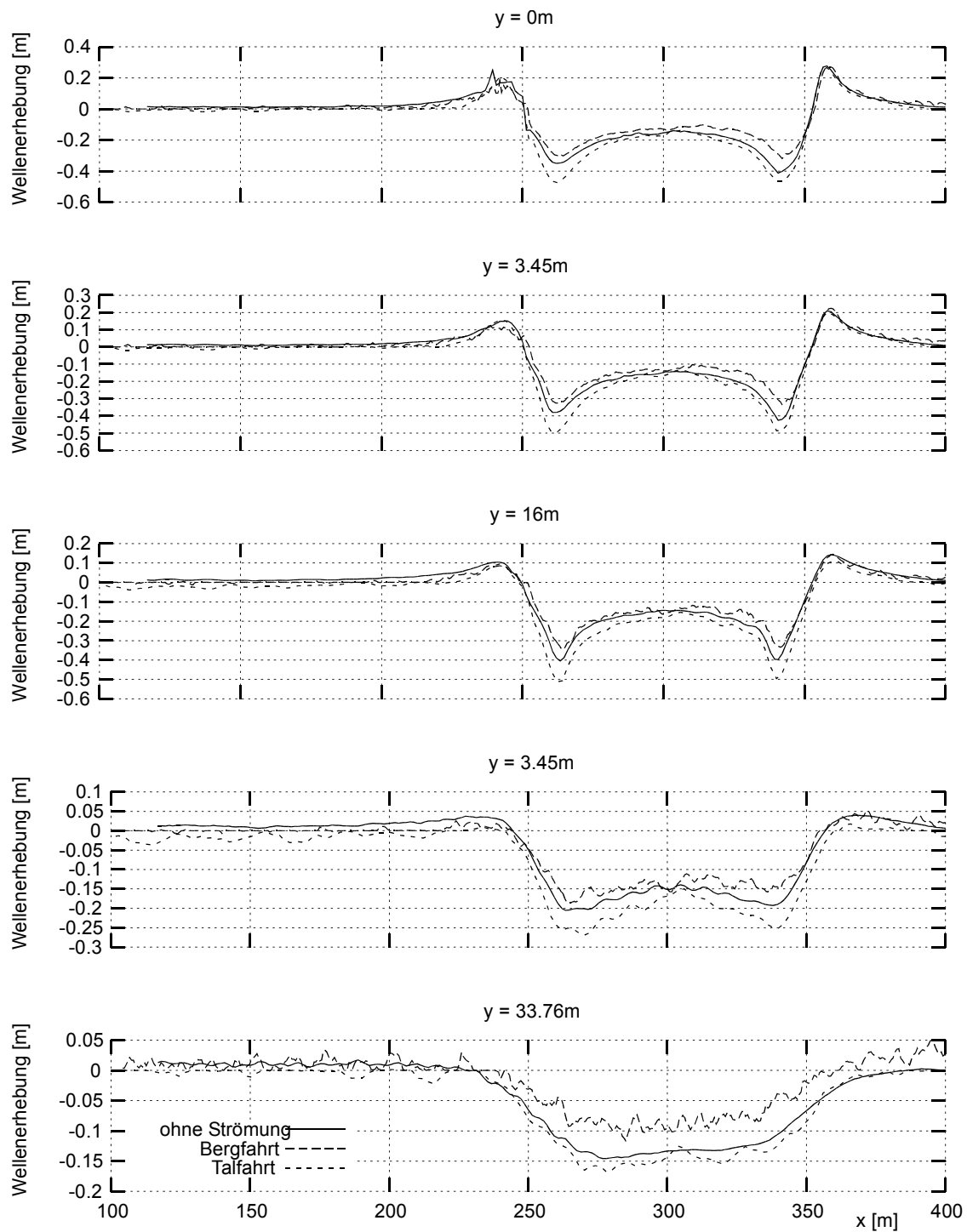


Abb. 5.27 Gemessene Wellenschnitte an fünf verschiedenen seitlichen Abständen zur Schiffsmittle

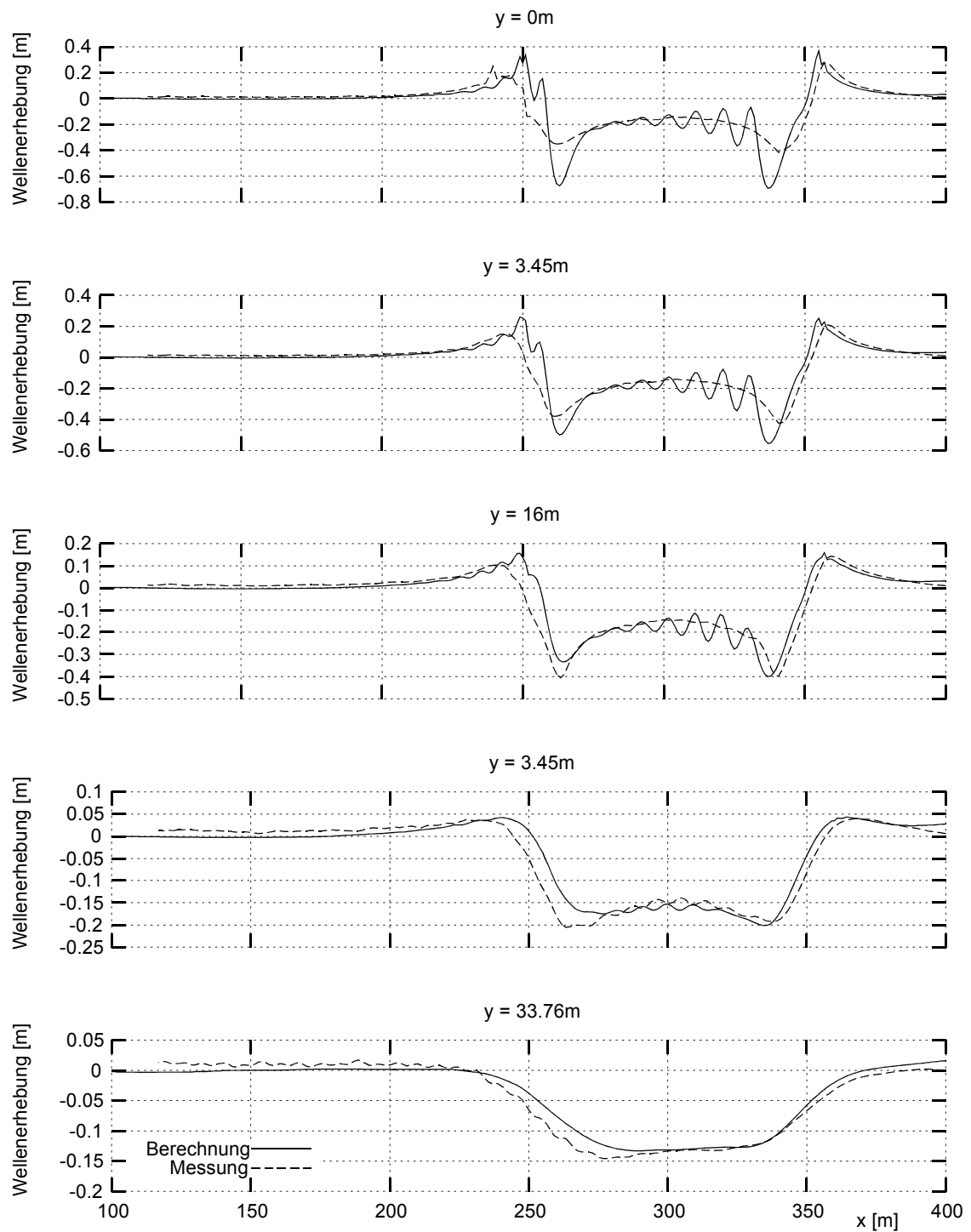


Abb. 5.28 Vergleich der gemessenen und berechneten Wellenschnitte bei Fahrt ohne Strömung

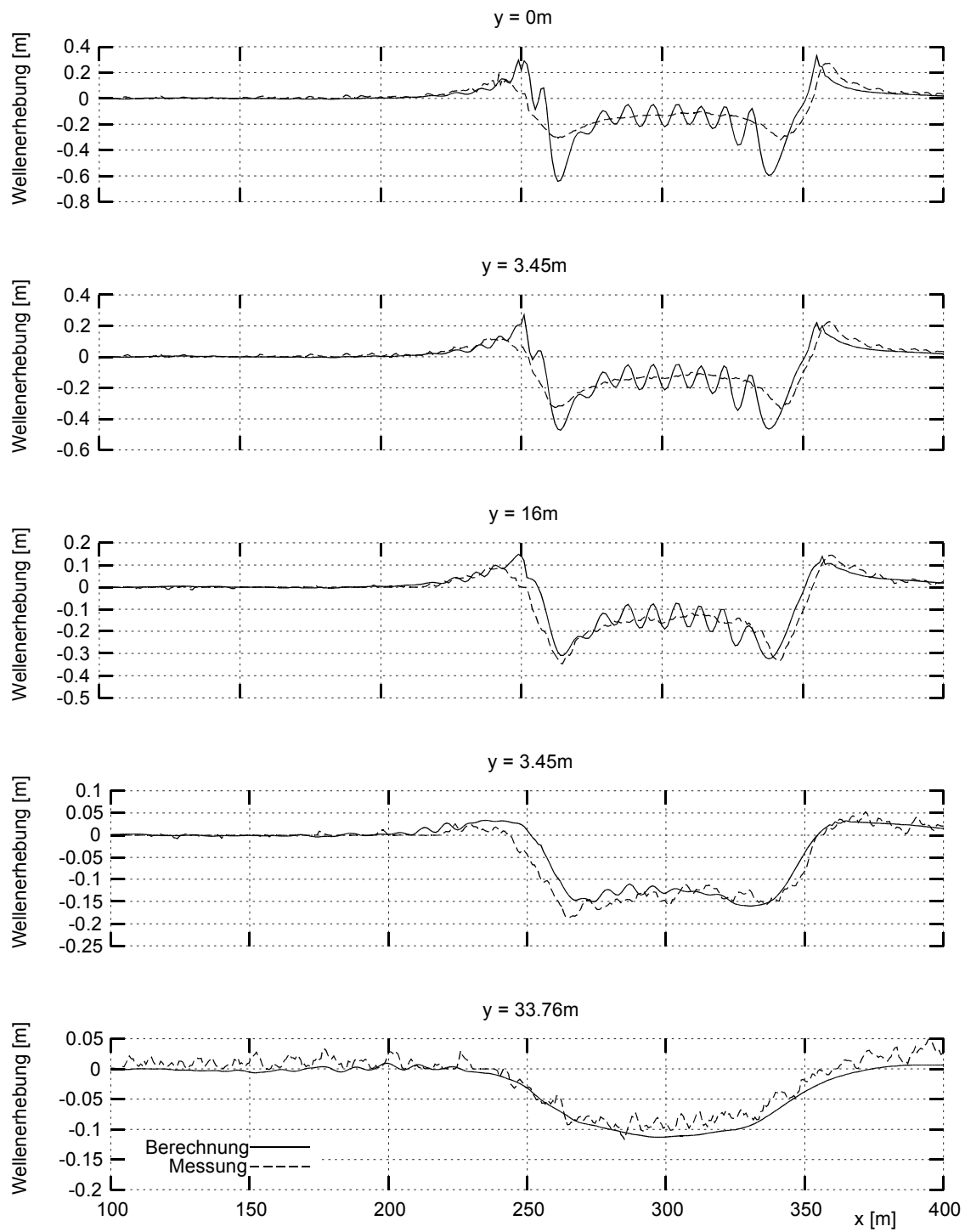


Abb. 5.29 Vergleich der gemessenen und berechneten Wellenschnitte bei Bergfahrt

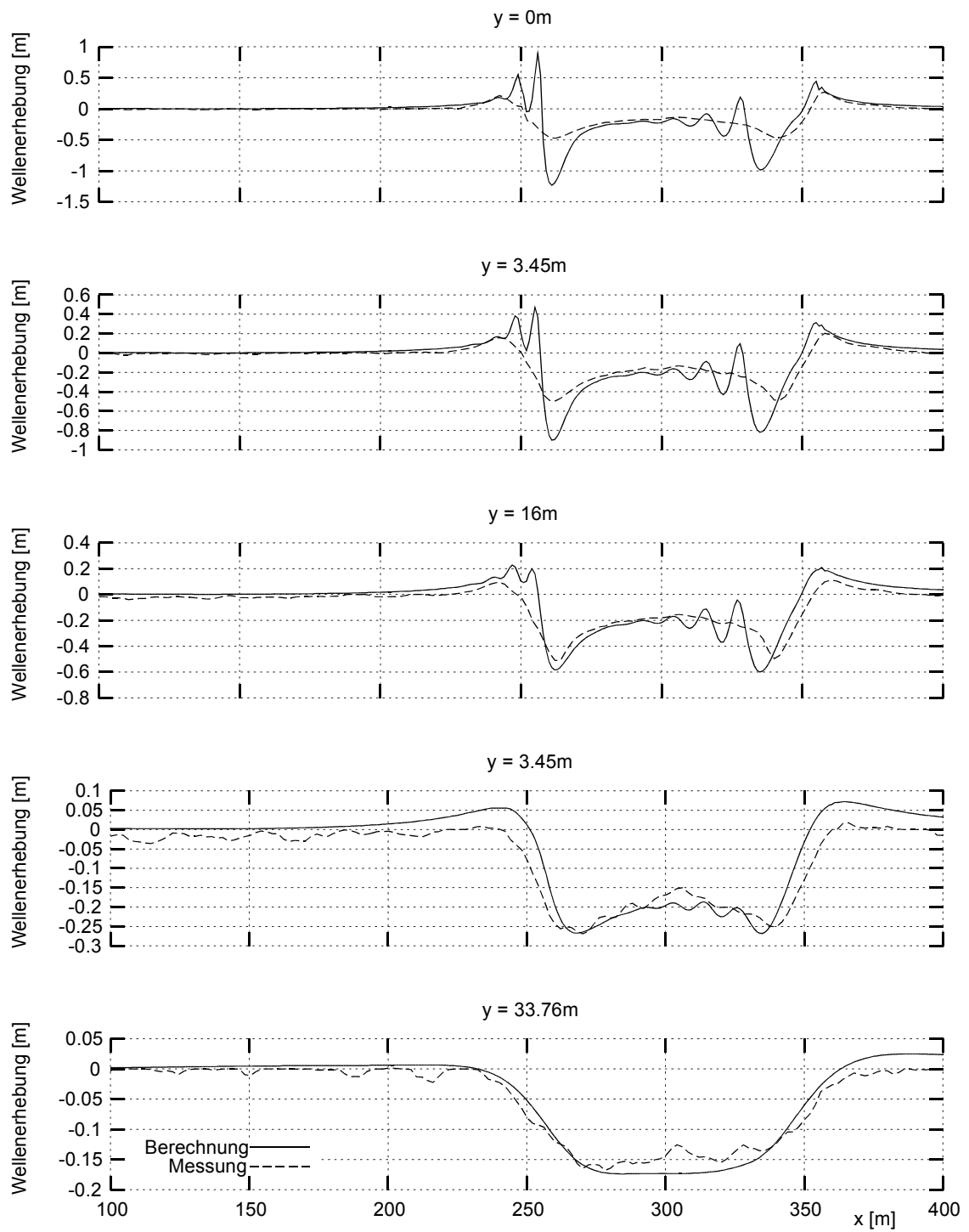


Abb. 5.30 Vergleich der gemessenen und berechneten Wellenschnitte bei Talfahrt



### 5.1.8 Vereinheitlichte Flachwassertheorie – vertikal oszillierender Körper

Die von Jiang (2001) vorgestellte vereinheitlichte Flachwassertheorie ermöglicht es, den Druck auf der Außenhaut eines schwimmenden Körpers zu berechnen. Dabei muß sich die Schiffsform allerdings als eindeutige Funktion  $T(x,y)$  darstellen lassen. Moderne Seeschiffsformen mit Bugwulst können also nicht berücksichtigt werden. Bei der Anwendung der vereinheitlichten Flachwassertheorie hat sich herausgestellt, daß die Kopplung des Innenfeldes mit dem Außenfeld entlang der gekrümmten Wasserlinie numerisch sehr schwierig ist. Im Gegensatz zu der in 5.1.2 verwendeten reflektierenden Randbedingung an der schräg im Rechengebiet verlaufenden Wand, werden hier an der Grenze zwischen Innen- und Außenfeld beide Geschwindigkeitskomponenten vorgegeben. Wegen dieser numerischen Schwierigkeiten und der eingeschränkten Anwendbarkeit für moderne Schiffsformen, wird dieses Verfahren im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht vertieft behandelt.

Es soll hier eine Anwendung dargestellt werden, die sowohl numerisch als auch experimentell untersucht wurde. Ein Körper mit kreisförmigem Querschnitt führt im flachen Wasser erzwungene vertikale Schwingungen aus. Ähnliche Untersuchungen wurden von Yu und Ursell (1961), Keil (1974) und Yeung und Ananthakrishnan (1992) durchgeführt.

Die Seitenwand des Körpers ist senkrecht, der Einlauf der Seitenwand in den Boden elliptisch abgerundet. Die vertikale Bewegung wurde durch eine von einem Elektromotor angetriebene Exzentermechanik erreicht. Die Amplitude und Frequenz der Bewegung ließen sich stufenlos einstellen. Im Versuch wurden die Wellenerhebungen an fünf Orten und die vom Oszillator auf den Körper aufgebrachte Kraft gemessen. Die Messung des Drucks am Körperboden war nicht möglich, da die aus der Beschleunigung, der die im Körper angebrachten Drucksonden ausgesetzt waren, hervorgerufenen Drücke größer waren, als die zu messenden hydrodynamischen Druckoszillationen. Die Messung der Wellenerhebung an der Außenhaut des Körpers erwies sich als unzuverlässig, weil die eingesetzten Streifensonden auch im ausgetauchten Zustand von einem Wasserfilm benetzt waren, der sich innerhalb einer halben Schwingungsperiode nicht vollständig zurückbilden konnte. Es wurde deshalb die Wellenerhebung mit einer stationären Sonde nahe der Außenhaut gemessen. Die Wellensonden waren in einer Linie vom Mittelpunkt des Körpers senkrecht zur Tankwand angeordnet. Abb. 5.31 zeigt eine Skizze des Versuchsaufbaus. Der Versuch wurde im großen Schlepptank des DST durchgeführt. Der Tank hat eine Breite von 9.8 m und eine Länge von 180 m; der Körper befand sich auf halber Breite des Schlepptanks.

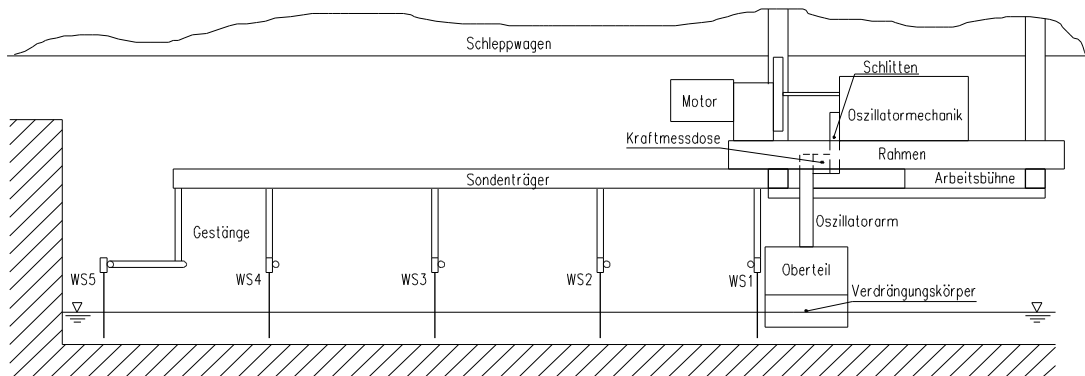


Abb. 5.31 Versuchsaufbau zur Validierung der vereinheitlichten Flachwassertheorie.

Der Körper hatte einen Durchmesser von 0.5 m und einen Ruhetiefgang von 0.1 m; die Wassertiefe betrug 0.2 m. Aus der gesamten Versuchsserie soll hier ein Fall mit einer Kreisfrequenz von  $4 \text{ s}^{-1}$  und einer Amplitude von 0.02 m vorgestellt werden.

In Abb. 5.32 sind die Zeitschriebe der gemessenen (durchgezogene Linie) und berechneten (gestrichelte Linie) Wellenerhebungen an den fünf Wellensonden aufgetragen. Drei zusätzliche gepunktete Hilfslinien markieren wesentliche Zeitpunkte: Die Bewegung des Körpers beginnt bei 4.15 s vom oberen Totpunkt. Bei 7.36 s erreicht die erste Welle die Tankwand; danach beginnt die Überlagerung der vom Körper abgestrahlten mit den von der Tankwand reflektierten Wellen. Bei 10.57 s erreicht die erste reflektierte Welle wieder den Körper. Um den Schwierigkeiten bei der Erfüllung der Kopplung von Innen- mit Außenfeld an der kreisförmigen Wasserlinie zu begegnen, wurde die Berechnung hier nicht im kartesischen Gitter durchgeführt. Stattdessen wurden die Gleichungen in Polarkoordinaten transformiert und die Tankwand als gekrümmte Wand mit dem Durchmesser der Tankbreite modelliert. Im Vergleich der Messung mit der Berechnung zeigt sich zunächst eine sehr gute Übereinstimmung der Sonden-schriebe. Mit dem Beginn der Reflexion an der Tankwand zeigen sich Unterschiede zwischen Berechnung und Messung vor allem bei den wandnahen Sonden. Dies ist zum größten Teil durch die verfälschte Modellierung der Tankgeometrie zu erklären. Darüber hinaus besteht eine gewisse Unsicherheit bezüglich des exakten Abstands des Körpers von der Tankwand, was im Zusammenspiel der abgestrahlten und reflektierten Wellen zu Unterschieden führen kann.

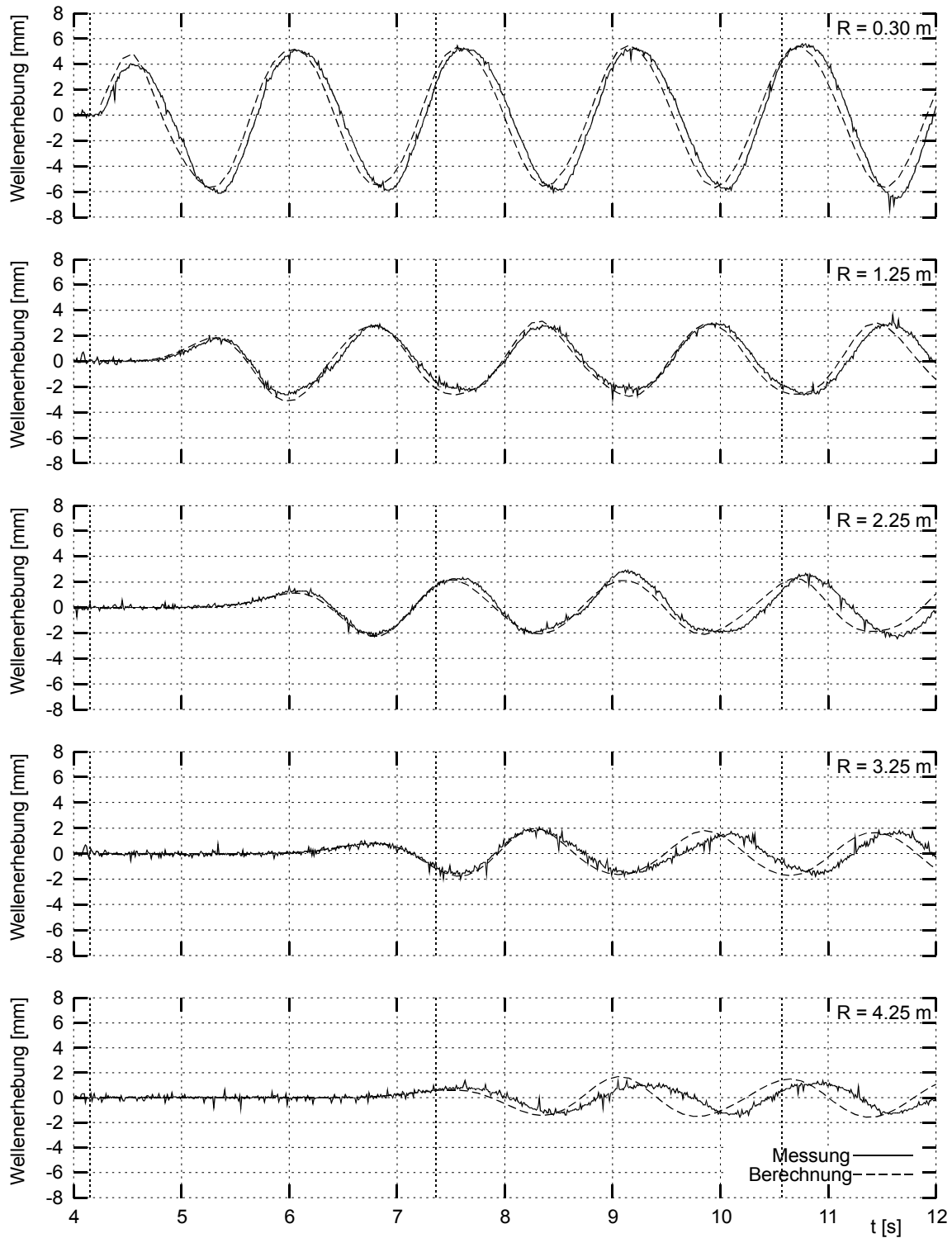


Abb. 5.32 Zeitschriebe der gemessenen und berechneten Wellenerhebungen an fünf verschiedenen Sondenpositionen; der Beginn der Körperbewegung bei 4.15 s, das Auftreffen der ersten Wellen auf die Tankwand bei 7.36 s und das Auftreffen der ersten reflektierten Welle am Körper bei 10.57 s sind durch senkrechte Linien gekennzeichnet.

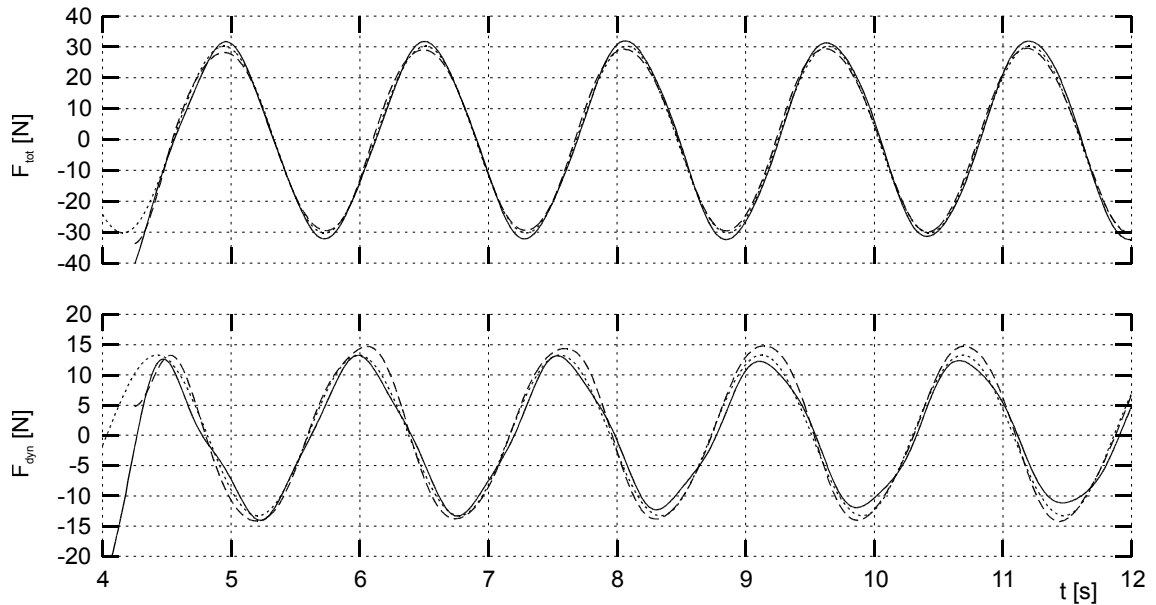


Abb. 5.33 Zeitschriebe der gemessenen und berechneten Kräfte am oszillierenden Körper

In Abb. 5.33 sind die gemessenen vertikalen Kräfte den berechneten gegenübergestellt. Das obere Diagramm zeigt die Gesamtkraft, während im unteren Diagramm der dynamische Anteil der Kraft dargestellt ist. Neben der gemessenen Kraft (durchgezogene Linie) und der mit der vereinheitlichten Flachwassertheorie berechneten Kraft (gestrichelte Linie) ist hier eine weitere Berechnung mit WAMIT (gepunktete Linie) dargestellt. WAMIT ist ein am MIT entwickeltes potentialtheoretisches Paneelverfahren, daß die hydrodynamischen Koeffizienten im Frequenzbereich unter Berücksichtigung endlicher Wassertiefe und der Tankwand berechnen kann. Anhand der bekannten vertikalen Position des Körpers  $z=z(t)$  können die Kräfte im Zeitbereich berechnet werden:

$$F_{tot, WAMIT} = -(A_{33} \ddot{z} + B_{33} \dot{z} + C_{33} z)$$

$$F_{dyn, WAMIT} = -(A_{33} \ddot{z} + B_{33} \dot{z})$$

Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung aller drei ermittelten Kraftkomponenten sowohl für die Gesamtkraft als auch für den dynamischen Anteil allein. Der Unterschied zum Startzeitpunkt rührt einerseits daher, daß WAMIT den Startvorgang wegen der Berechnung im Frequenzbereich nicht berücksichtigen kann, andererseits muß beim Anlaufen des Versuchs die Trägheit der Mechanik im Oszillator überwunden werden, was bei der Simulation mit der vereinheitlichten Flachwassertheorie nicht berücksichtigt wurde.

Dieses Beispiel verdeutlicht, daß die vereinheitlichte Flachwassertheorie in Fällen, bei denen die Voraussetzungen für ihre Anwendbarkeit gegeben sind, verwertbare Ergebnisse liefert, die mit Messungen sehr gut übereinstimmen. Während sie bei vielen

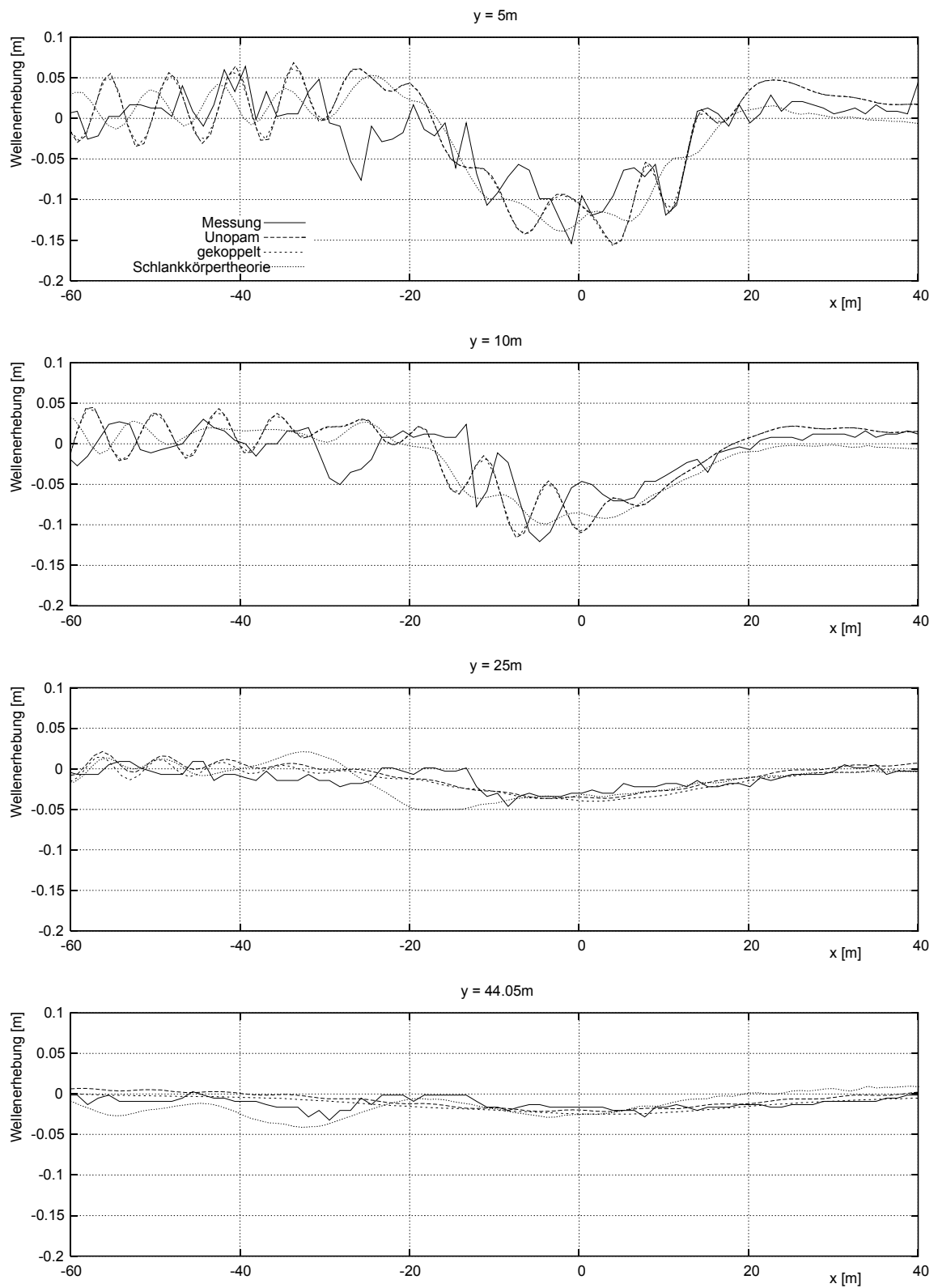
Schiffsformen nur mit großen numerischen Schwierigkeiten oder gar nicht angewendet werden kann, ist dies gerade ein Fall, in dem die sonst verwendeten Modellierungen des Schwimmkörpers, nämlich die Druckapproximation oder die Schlankkörpertheorie, prinzipiell nicht angewendet werden können.

### 5.1.9 Kopplung mit einem potentialtheoretischen Paneelverfahren

Als letzter Validierungsfall soll die Kopplung des Flachwassergebiets mit einer Innenfeldlösung eines potentialtheoretischen Paneelverfahrens gemäß Abschnitt 4.6 gezeigt werden. Als Paneelverfahren wird hier Unopam gewählt. An die Kopplung wird die Anforderung gestellt, daß die gekoppelte Berechnung im Außenfeld zum gleichen Ergebnis kommen muß, wie die Berechnung mit Unopam allein in einem Rechengebiet von der Größe des Außenfeldes. Das Innenfeld wurde dementsprechend auf die volle Kanalbreite ausgedehnt. Aus diesem großen Innenfeld wurde ein kleines Gebiet ausgeschnitten und mit dem Außenfeld gekoppelt. So gibt es zum einen im gesamten Gebiet eine Lösung von Unopam und eine gekoppelte Lösung. Zusätzlich wurden die Berechnungen auch noch mit der Schlankkörpertheorie durchgeführt.

Es wurde hier der Modellversuch mit einem Serie 60-Modell im Flachwasser nachgerechnet. Der Versuch wurde im DST durchgeführt. Die Wassertiefe betrug 0.5 m, der Kanal war 9.8 m breit. Es wurden die drei unterkritischen Geschwindigkeiten  $Fr_h = 0.5, 0.6$  und  $0.7$  verglichen.

In den Abb. 5.24–5.35 sind die gemessenen und berechneten Wellenschnitte in vier Abständen zur Schiffsmitte aufgetragen. Dabei ist festzustellen, daß sich die Berechnung von Unopam und die gekoppelte Lösung bei allen drei Geschwindigkeiten kaum sichtbar unterscheiden. Die Wellen können sich also ungehindert durch die Kopplungsgrenze ausbreiten. Zudem nimmt die Übereinstimmung zwischen den von Unopam berechneten und gemessenen Wellen mit zunehmender Geschwindigkeit zu. Die Berechnungen mit dem Paneelverfahren sind wesentlich genauer als die Berechnungen mit der Schlankkörpertheorie, vor allem in der Nähe des Schiffs.

Abb. 5.34 Vergleich der Wellenschnitte für ein Serie 60 Schiff,  $Fr_h = 0.5$

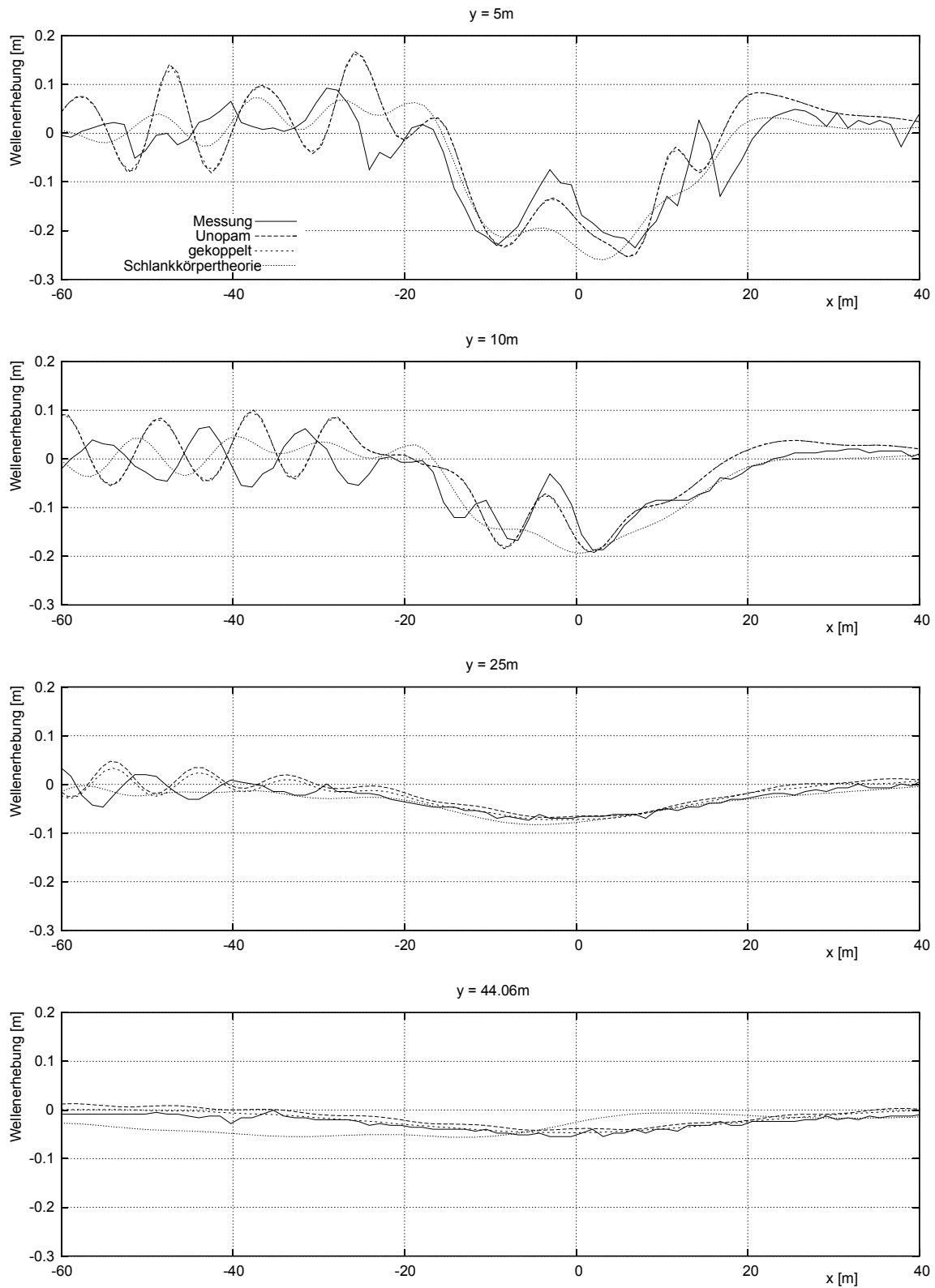


Abb. 5.35 Vergleich der Wellenschnitte für ein Serie 60 Schiff,  $Fr_h = 0.6$

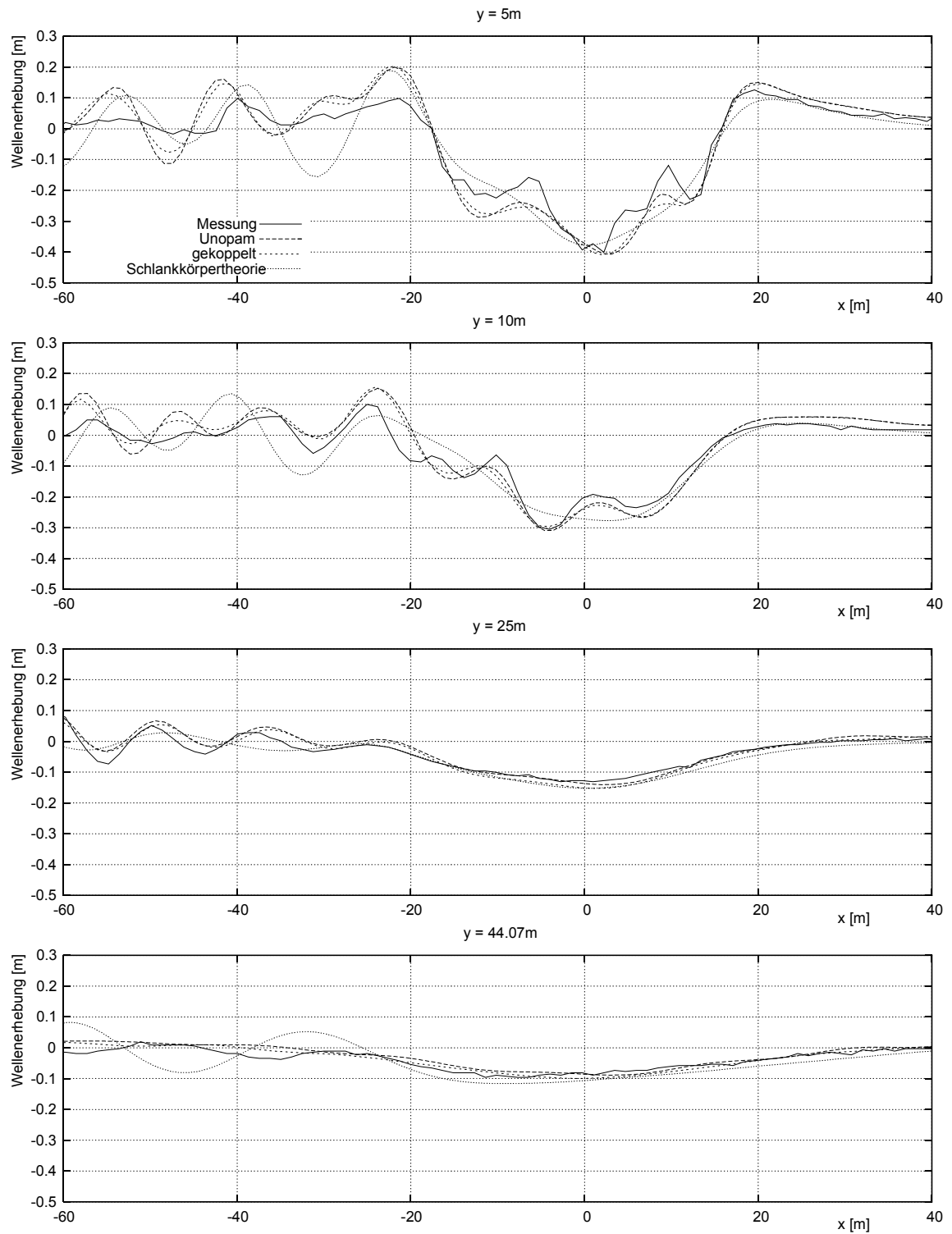


Abb. 5.36 Vergleich der Wellenschnitte für ein Serie 60 Schiff,  $Fr_h = 0.7$



## 5.2 Praxisbeispiele

In diesem Abschnitt werden Simulationen gezeigt, die mangels Modell- oder Naturmessungen nicht validiert werden konnten. Sie sollen zeigen, welche Möglichkeiten die Anwendung der Boussinesq-Gleichungen mit dem entwickelten Programm bietet.

### 5.2.1 Einfluß der Kanalgeometrie

Die Untersuchung verschiedener Kanalgeometrien kann Aufschluß geben, bei welcher Geometrie die geringsten Wellen am Ufer zu erwarten sind. Indem die Wellenhöhe berechnet wird, kann einerseits die höchste zulässige Geschwindigkeit ermittelt werden und andererseits eine Ausbaumaßnahme des Kanals geplant werden, um höhere Geschwindigkeiten zu ermöglichen. Eine ähnliche Untersuchung ist bei Mathew und Akylas (1990) zu finden.

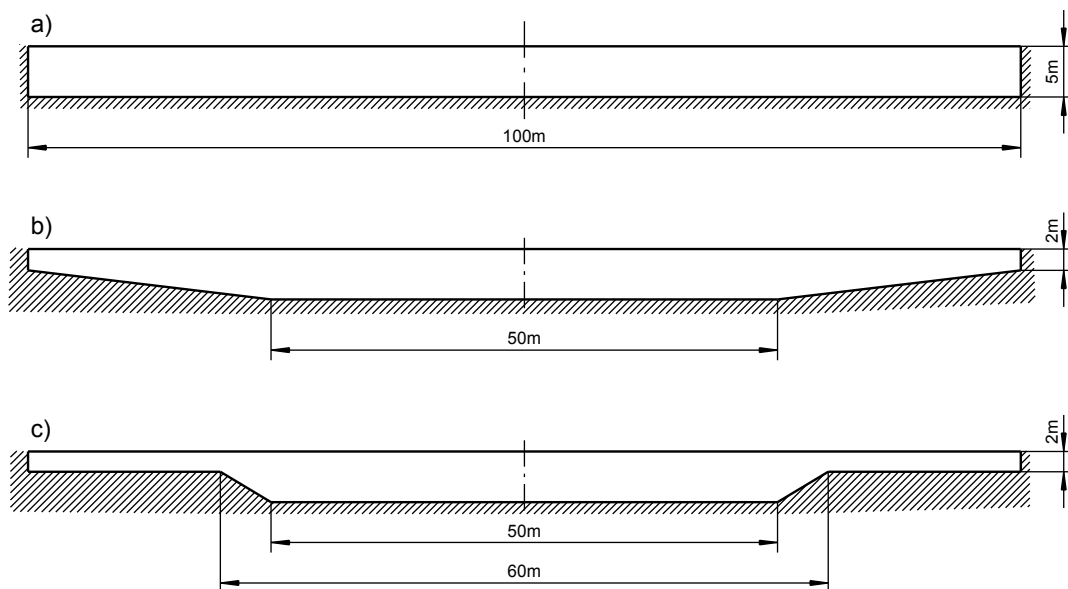


Abb. 5.37 Untersuchte Kanalprofile: a) Rechteckkanal, b) Trapezkanal, c) Kanal mit seichtem Uferbereich

Es werden drei Kanäle mit verschiedenen Profilen untersucht, die in Abb. 5.37 dargestellt sind. Alle Kanäle haben eine Breite von 100 m und eine Fahrrinntiefe von 5 m. Sie sind damit breiter als die üblichen Kanäle in Europa. In diesem Kanal fährt ein 40 m langes und 8 m breites Binnenfahrgastschiff mit einer Geschwindigkeit von 7 m/s (25.2 km/h). Dies entspricht bei einer Wassertiefe von 5 m genau der kritischen Geschwindigkeit. Dieser praxisferne Extremfall wurde gewählt, weil er den Einfluß des Kanalprofils auf die Wellenausbreitung am eindrucksvollsten verdeutlicht. In Abb. 5.38 ist zunächst das typische, kritische Wellenbild im Rechteckkanal zu sehen mit Solitonwellen, die vor dem Schiff davon laufen. In Abb. 5.39 ist das Wellenbild im Trapezkanal dargestellt. Hier bildet sich auch eine Solitonwelle aus, wobei die Ausbildung sehr

viel langsamer erfolgt als im Rechteckkanal (Abb. 5.38–5.39 zeigen den gleichen Zeitpunkt). Sie ist allerdings höher, als im Rechteckkanal und in der Kanalmitte schlanker als im flacher werdenden Uferbereich.

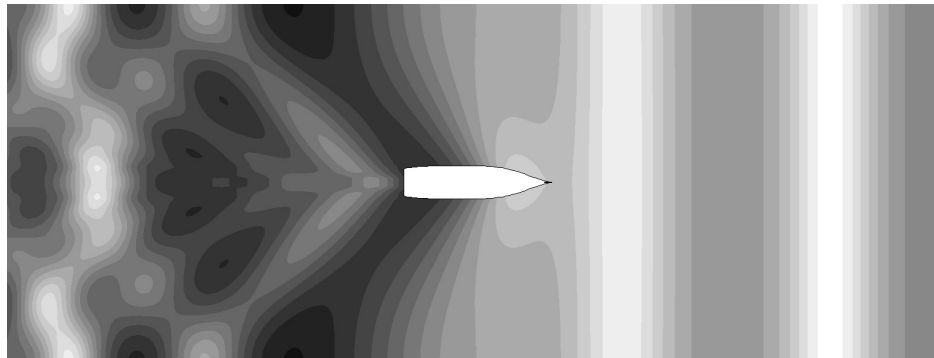


Abb. 5.38 Wellenbild des Binnenfahrgastschiffs im Rechteckkanal bei kritischer Geschwindigkeit

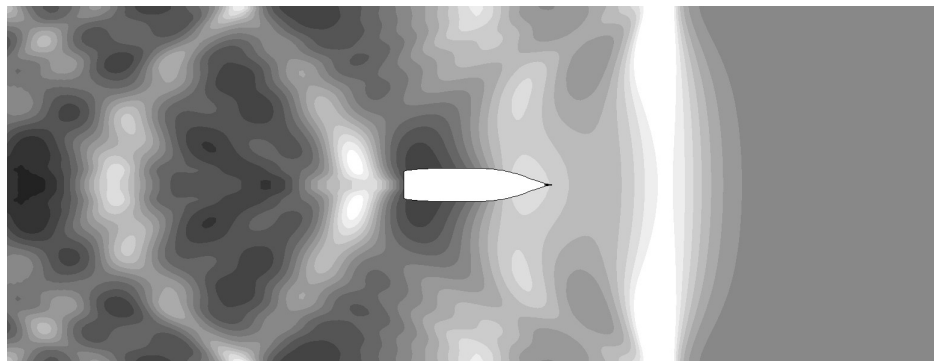


Abb. 5.39 Wellenbild des Binnenfahrgastschiffs im Trapezkanal bei kritischer Geschwindigkeit

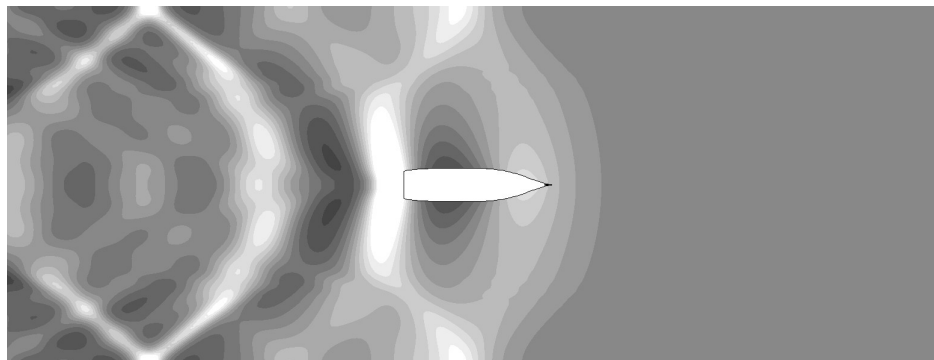


Abb. 5.40 Wellenbild des Binnenfahrgastschiffs im Kanal mit seichten Uferzonen

In Abb. 5.40 ist schließlich das Wellenbild im Kanal mit seichten Uferbereichen dargestellt. Hier bildet sich, selbst bei sehr langer Simulation, keine Solitonwelle aus. Stattdessen entstehen querab vom Schiff am Ufer hohe Wellenberge und ein ausgeprägtes, sehr steiles System von Diagonalwellen, die an der senkrechten Uferwand reflektiert werden.

### 5.2.2 Wellen im Hafenbecken

Eine weitere Simulation soll den Nutzen des numerischen Verfahrens bei der Planung von Hafenanlagen aufzeigen, indem die Wechselwirkung der Wellen mit der Geometrie der Hafenbecken untersucht wird. Hier fährt ein schnelles, kleines Schiff mit überkritischer Geschwindigkeit an einem Hafenbecken vorbei. Die Wellen, die sonst am schrägen Kanal- oder Flußufer gedämpft werden und auslaufen, können in diesem Fall als breite Wellenfront ungestört in das Hafenbecken einlaufen. Sie werden an den Wänden des Hafenbeckens reflektiert und können u. U. den (Lade-)Verkehr im Hafen merklich stören.

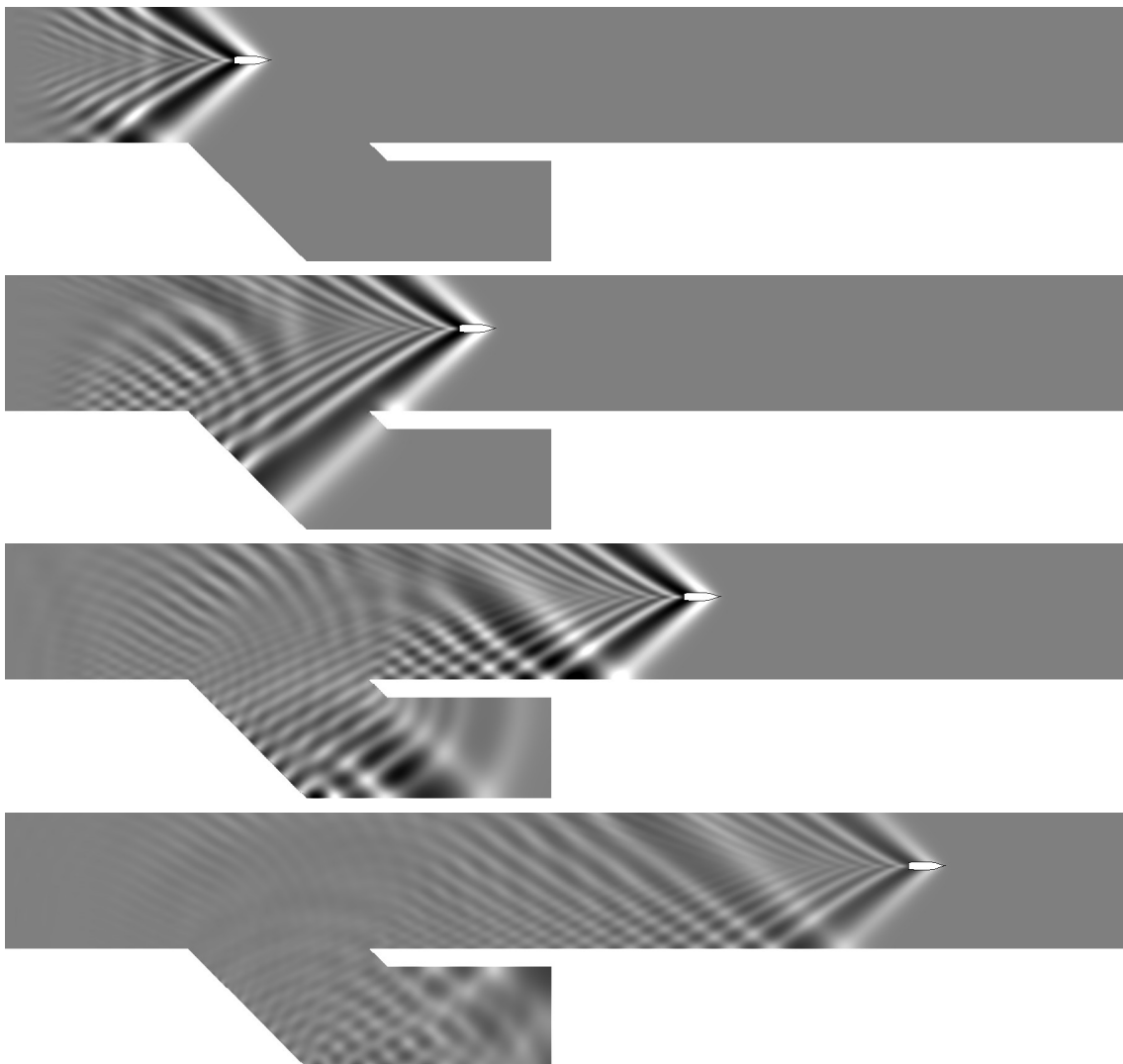


Abb. 5.41 Zeitreihe der Wellenbilder eines kleinen Binnenfahrgastschiffs bei Vorbeifahrt mit überkritischer Geschwindigkeit an einem Hafenbecken

### 5.2.3 Künstlich veränderte Bodentopographie zur Beschleunigung des Übergangs vom Tief- ins Flachwasser

Feldtmann und Garner (1999) haben eine zum Patent angemeldete Idee vorgestellt, durch die einem vom Tief- ins Flachwasser fahrenden Schiff der Übergang durch den transkritischen Geschwindigkeitsbereich beschleunigt wird. Der Begriff Tiefwasser bedeutet in diesem Zusammenhang nicht unendlich tiefes Wasser, sondern eine Wassertiefe, in der das Schiff mit der installierten Antriebsleistung nur im unterkritischen Geschwindigkeitsbereich fahren kann. Wenn ein Schiff mit konstanter Geschwindigkeit über einem Boden fährt, der kontinuierlich ansteigt und schließlich so flach ist, daß sich eine Tiefenfroudezahl größer als eins ergibt, so durchfährt es den transkritischen Geschwindigkeitsbereich, in dem es eine starke Widerstandserhöhung erfährt. Die Idee besteht nun darin, den Boden durch wasserbauliche Maßnahmen so zu verändern, daß statt eines kontinuierlichen Übergangs vom Tief- ins Flachwasser ein Sprung erfolgt, so daß der transkritische Geschwindigkeitsbereich übersprungen wird.

Diese Baumaßnahme ist sehr aufwendig und bietet sich vor allem in schmalen Flußmündungen oder in Flußmündungen mit einer schmalen Fahrrinne an. Hier wird ein Beispiel simuliert, in dem eine kleine Schnellfähre mit einer konstanten Geschwindigkeit von 8 m/s über eine Stufe fährt; Abb. 5.42 zeigt die Geometrie der Stufe. Die Wassertiefe beträgt vor der Stufe 13.3 m und dahinter 3.39 m. Das Schiff fährt also anfänglich mit einer Tiefenfroudezahl von 0.7 und erreicht hinter der Stufe 1.4. Der Boden vor und hinter der Stufe, die sich über die gesamte Breite des Rechengebiets erstreckt, ist eben. Die Stufe selbst befindet sich in der Mitte des Rechengebiets.

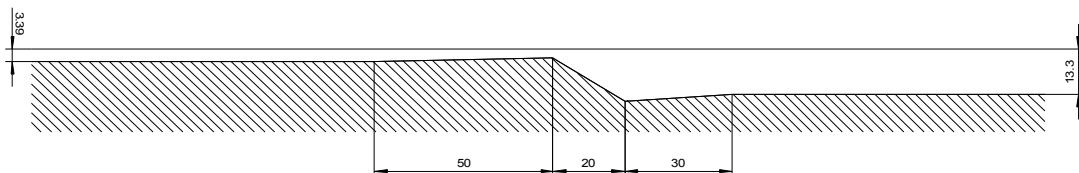
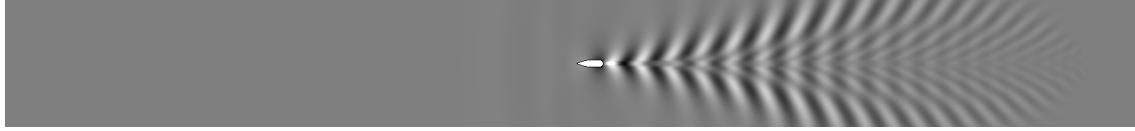


Abb. 5.42 Querschnitt durch die Bodentopographie im Bereich der Stufe

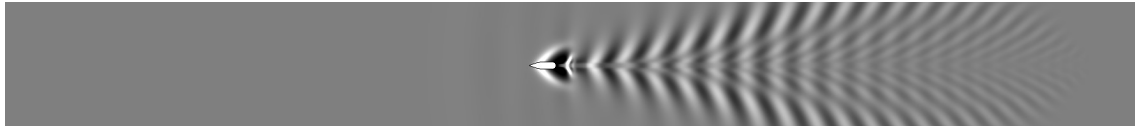
In Abb. 5.43 ist die Zeitreihe der Wellenbilder dargestellt. Zunächst bildet sich hinter dem Schiff das typische Wellenbild bei unterkritischer Fahrt. In dem Moment, in dem das Schiff die Stufe überfährt, bildet sich hinter dem Schiff ein überkritisches Wellensystem aus. Die schnellen Querwellen werden im flacheren Wasser abgebremst und bleiben zurück. Aus den Diagonalwellen entstehen so solitonartige Wellen, die sich jetzt mit kritischer Geschwindigkeit fortpflanzen.

Würde der Übergang zwischen tiefem und flachem Gebiet steiler geformt, so würde auch das Durchfahren des transkritischen Geschwindigkeitsbereichs schneller erfolgen. Weitere Simulationen haben gezeigt, daß die Wellen bei sehr steilen Stufen zu brechen

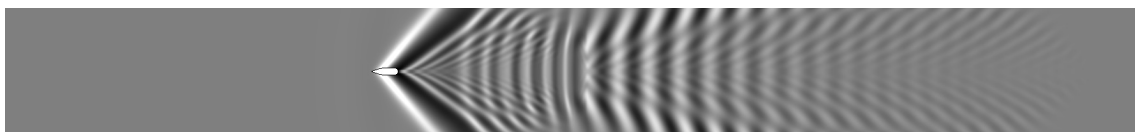
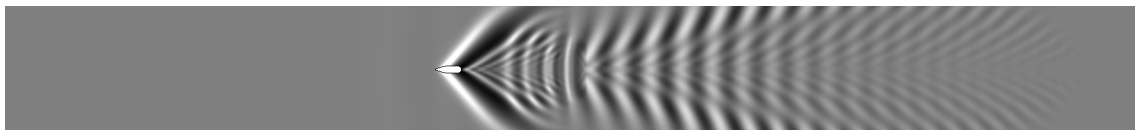
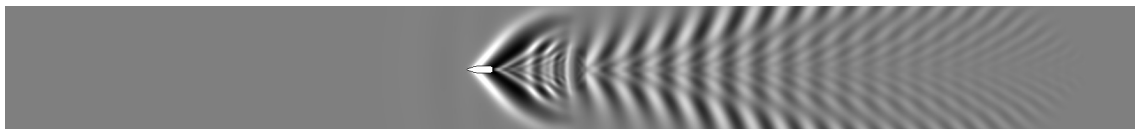
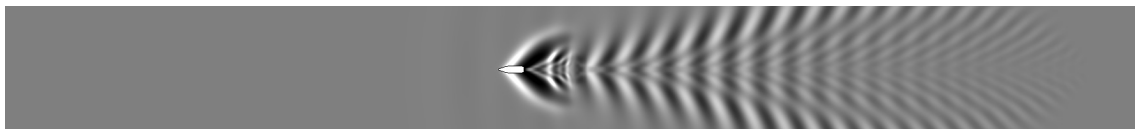
beginnen. Auch ist zu bedenken, daß der Schüttwinkel des Bodenmaterials (Sand, Gestein) begrenzt ist.



(a) Wellenbild der Fähre bei unterkritischer Fahrt kurz vor der Stufe



(b) Wechselwirkung des Wellensystems mit der Bodentopographie, kurz nachdem die Fähre die Stufe passiert hat



(b) Entwicklung des Wellensystems, nachdem die Fähre die Stufe hinter sich gelassen hat



(d) Wellensystem bei überkritischer Fahrt im flacheren Wasser

Abb. 5.43 Zeitreihe der Wellenbilder beim Übergang vom Tief- ins Flachwasser. Die Wassertiefe beträgt im linken Bereich 13.3 m und im rechten 3.39 m. Das Schiff fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 8 m/s.

Der vergleichbare Fall ohne eine Stufe ist im Folgenden dargestellt. Abb. 5.44 zeigt eine Zeitreihe der Wellenbilder, die entstehen, wenn das Schiff mit der konstanten Geschwindigkeit von 8 m/s über einen kontinuierlich ansteigenden Boden fährt. Dies entspricht im Prinzip dem natürlichen Gefälle von Flüssen, wenngleich es sehr steil ist (1:100). Im linken Viertel des Gebiets beträgt die Wassertiefe 3.39 m, im rechten Viertel 13.3 m. Dazwischen nimmt die Wassertiefe linear von links nach rechts zu. Das Schiff beginnt seine Fahrt am linken Rand des Rechengebiets. Im ersten Bild hat das Schiff den Rand der Steigung erreicht und bereits im zweiten Bild hat sich ein typische unterkritisches Wellensystem ausgebildet. Während das Schiff kontinuierlich in den flacheren Bereich fährt, durchfährt es den transkritischen Geschwindigkeitsbereich. In dieser Simulation ist die Zeit, die das Schiff dafür benötigt zu kurz, als daß sich Solitonwellen ausbilden können. Allerdings zeigt sich auch hier, besonders im vierten Bild, daß die Diagonalwellen sehr hoch werden und sich der Wellenwinkel aufweitet. Die Erhöhung der Schiffswellen steht für den erhöhten Leistungsbedarf, der sich beim Durchfahren des transkritischen Geschwindigkeitsbereichs ergibt. Im letzten Bild hat sich schließlich ein überkritisches Wellensystem ausgebildet.

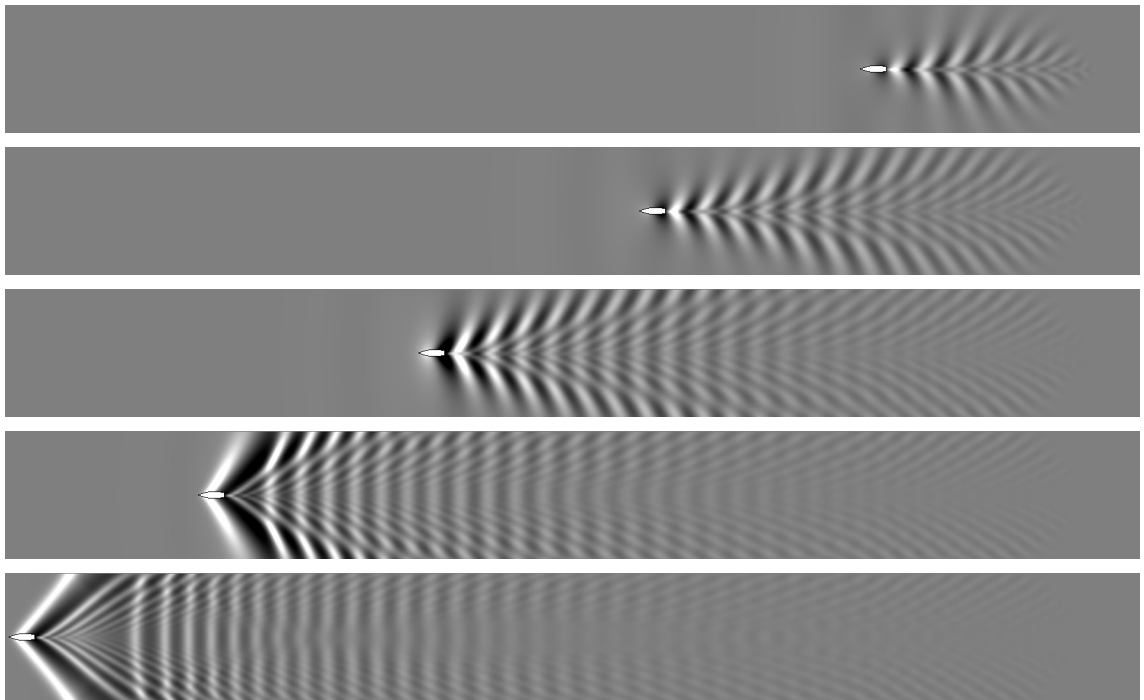
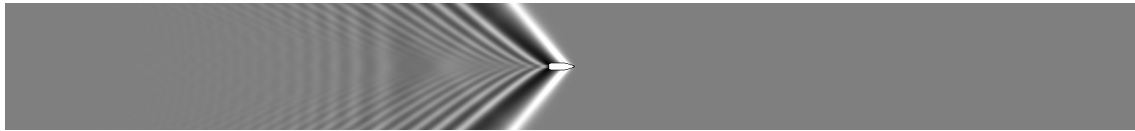
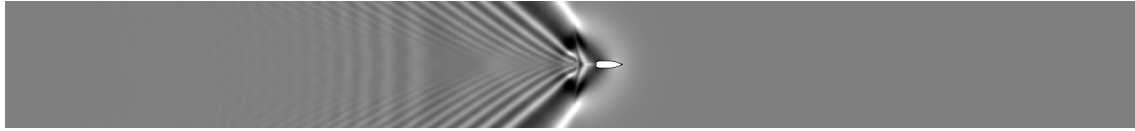


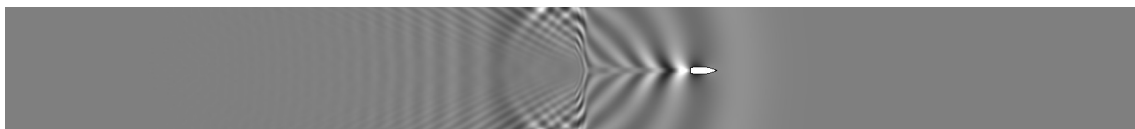
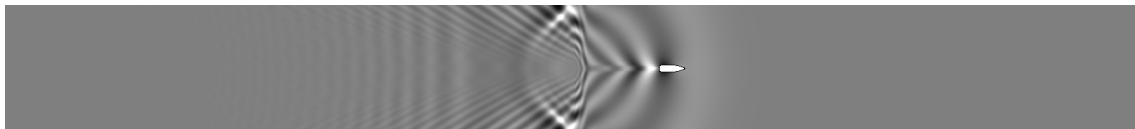
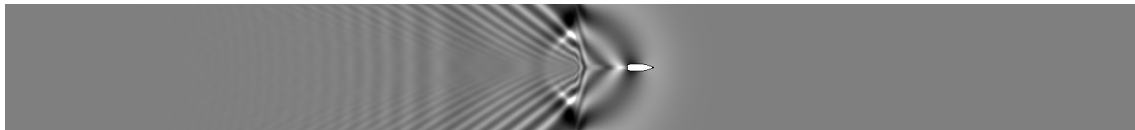
Abb. 5.44 Zeitreihe der Wellenbilder beim kontinuierlichen Übergang vom Tief- ins Flachwasser. Im ersten Bild erreicht das Schiff den rechten Rand der Steigung ( $h = 13.3$  m), im vierten Bild den linken Rand ( $h = 3.39$  m). Die Schiffsgeschwindigkeit ist konstant bei 8 m/s.



(a) Wellenbild der Fähre bei überkritischer Fahrt vor der Stufe; die Querwellen sind während der Beschleunigungsphase entstanden.



(b) Wechselwirkung des Wellensystems mit der Bodentopographie, kurz nachdem die Fähre die Stufe passiert hat



(c) Entwicklung des Wellensystems, nachdem die Fähre die Stufe hinter sich gelassen hat



(d) Wellensystem bei der unkritischen Fahrt in tieferem Wasser.

Abb. 5.45 Zeitreihe der Wellenbilder beim Übergang vom Flach- ins Tiefwasser. Die Wassertiefe beträgt im linken Bereich 13.3 m und im rechten 3.39 m. Das Schiff fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 8 m/s.

In Abb. 5.45 ist die Zeitreihe der Wellenbilder für den umgekehrten Fall dargestellt, daß nämlich das Schiff vom flachen in das tiefe Wasser fährt. Zunächst bildet sich hinter dem Schiff das typische überkritische Wellenbild. Die Querwellen, die zu erkennen sind, sind während der Beschleunigungsphase entstanden.

nigungsphase entstanden. In dem Moment, in dem das Schiff die Stufe überfährt und das tiefe Wasser erreicht, bildet sich hinter dem Schiff langsam ein unterkritisches Wellensystem aus. Die hohen divergenten Wellen des anfänglich überkritischen Wellensystems werden an der Stufe teilweise reflektiert und teilweise gebeugt.

#### 5.2.4 Begegnungsverkehr und Überholmanöver

Die instationäre Kopplung unterscheidet sich in einigen wesentlichen Punkten von der stationären Kopplung, die in Abschnitt 4.6.1 vorgestellt wurde. In Abb. 5.46 sind zwei Rechengebiete A und B dargestellt, die sich in einer schmalen Zone überlappen.

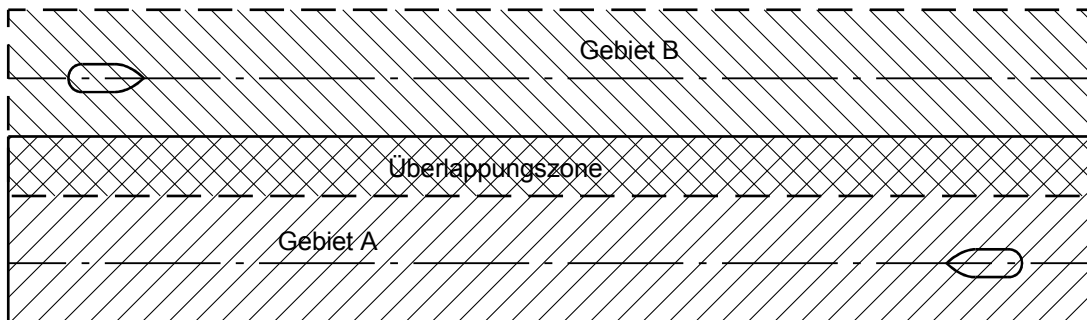


Abb. 5.46 Instationäre Kopplung von zwei Rechengebieten

Für jeden Zeitschritt wird in den Gebieten A und B eine eigene Lösung berechnet. Dabei dienen die Lösungen des benachbarten Rechengebiets vom letzten Zeitschritt als Randbedingungen für den aktuellen Zeitschritt. Diese Randbedingung wird nun nicht mehr am Rand des angrenzenden Rechengebiets ermittelt, sondern auf einer um die Breite der Überlappungszone vom Rand entfernt verlaufenden Geraden. Solange die maximale Transportgeschwindigkeit, das ist hier die kritische Geschwindigkeit  $\sqrt{gh}$ , kleiner ist als die Breite der Überlappungszone geteilt durch die Dauer eines Zeitschritts, gehen weder Impuls noch Masse bei der Kopplung verloren. Nach der Berechnung der Lösung für den aktuellen Zeitschritt in beiden Rechengebieten werden die Zustandsgrößen in der Überlappungszone gegenseitig linear interpoliert. Dadurch werden numerische Schwingungen unterdrückt. Bei der Kopplung gleicher Rechenverfahren ist diese Interpolation kaum erforderlich und hat nur einen geringen Effekt. Sie ist vor allem von Bedeutung, wenn unterschiedliche Verfahren gekoppelt werden (z. B. RANSE mit Flachwassergleichungen).

Die Berechnung der Randbedingungen ist in diesem Fall einfach. Da beide Rechengebiete den gleichen Satz von Feldvariablen, nämlich  $\zeta, \bar{u}$  und  $\bar{v}$ , verwenden, muß nur eine Interpolation der Zustandsgrößen vom einen auf das andere Berechnungsgitter vorgenommen werden. Im günstigsten Fall überlappen sich die Berechnungsgitter bei gleicher Gitterweite so, daß die Gitterpunkte zur Deckung kommen.



Mit dieser Technik soll die Begegnung eines Küstenmotorschiffs mit einem Fahrgastschiff simuliert werden. Die Wassertiefe beträgt 5 m, das gesamte Rechengebiet ist 1000 m lang und 190 m breit. Das Küstenmotorschiff fährt mit einer Geschwindigkeit von 4.9 m/s ( $= 17.6$  km/h) von rechts nach links, während das kleinere Fahrgastschiff mit einer Geschwindigkeit von 5.6 m/s ( $= 20.2$  km/h) von links nach rechts fährt. Beide Schiffe werden mit Hilfe der Schlankkörpertheorie modelliert. Am oberen Rand befindet sich eine senkrechte Kanalwand, der untere Rand ist offen. Abb. 5.47 zeigt eine Zeitreihe der Wellenbilder. Es ist gut zu erkennen, wie sich die Wellensysteme beider Schiffe, die mit Beginn der Simulation aus dem Ruhezustand beschleunigt werden, entwickeln. Die Wellen laufen ungestört von einem zum anderen Rechengebiet. Indem die Wellen des einen Schiffs das andere Schiff erreichen, beeinflussen sie auch dessen dynamische Schwimmlage.

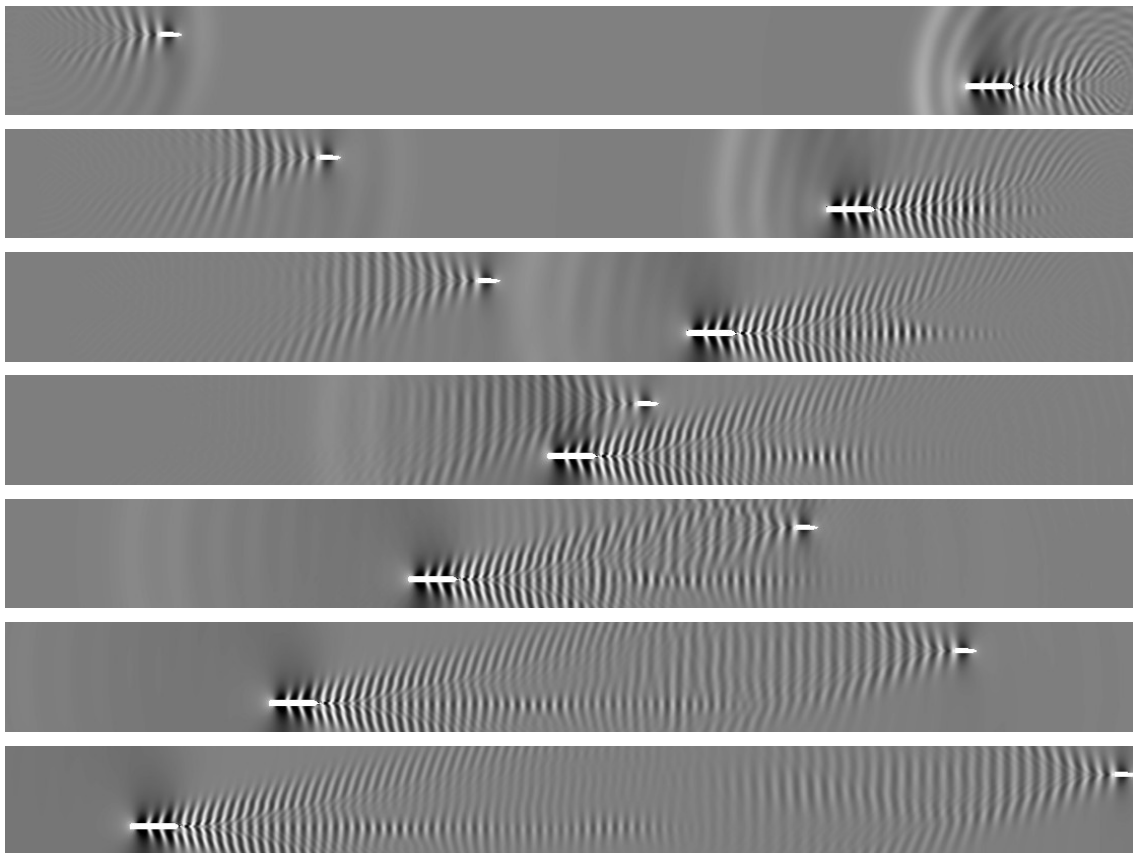


Abb. 5.47 Zeitreihe der Wellenbilder bei der Begegnung eines Küstenmotorschiffs mit einem Fahrgastschiff (nach 50 s, 100 s, 150 s, 200 s, 250 s, 300 s und 344 s). Das Küstenmotorschiff fährt mit einer Geschwindigkeit von 4.9 m/s, das Fahrgastschiff mit 5.6 m/s.

In Abb. 5.48 sind Absenkung und Trimm als Funktion der Schiffspositionen dargestellt. Weiterhin sind Zeitpunkte markiert, um die Lage der Schiffe zueinander zuordnen zu können. Zu Anfang der Simulation ist bei beiden Schiffen der instationäre Anfahrvorgang zu erkennen, bis sich eine stabile Schwimmlage eingestellt hat.

Aus der Absenkung des kleineren Fahrgastschiffs ist ersichtlich, wie es bei ca. 900 m erst auf die Bugwelle des Küstenmotorschiffs trifft und die Absenkung dabei abnimmt und etwas später in die primäre Welle des Küstenmotorschiffs gerät und die Absenkung dann zunimmt. In dem Verlauf des Trimmings des Fahrgastschiffs ist die Wirkung der Bug- und Heckwellensysteme des Küstenmotorschiffs gut zu erkennen. Dagegen wird die dynamische Schwimmlage des größeren Küstenmotorschiffs kaum beeinflusst. Seitenkräfte und Giermomente, die bei engen Passierabständen sehr wichtig werden, können mit diesem Verfahren allerdings nicht erfasst werden.

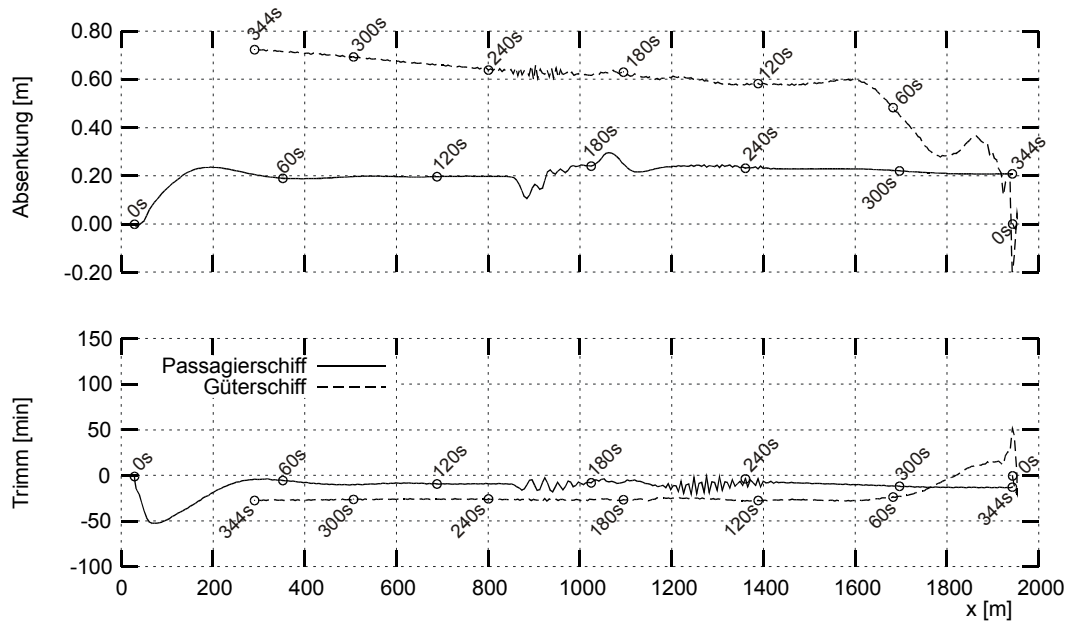


Abb. 5.48 Dynamische Absenkung und dynamischer Trimm beim Begegnen eines Fahrgastschiffs mit einem Küstenmotorschiff. Das Küstenmotorschiff fährt mit einer Geschwindigkeit von 4.9 m/s, das Fahrgastschiff mit 5.6 m/s.

In einem zweiten Beispiel wird simuliert, wie das Fahrgastschiff das Küstenmotorschiff überholt. In diesem Fall fahren das Küstenmotorschiff mit einer Geschwindigkeit von 4.2 m/s (= 15.1 km/h) und das Fahrgastschiff mit 5.6 m/s (= 20.2 km/h). Abb. 5.49 Fehler: Referenz nicht gefunden zeigt eine Zeitreihe der Wellenbilder. Auch hier ist die Wechselwirkung der Wellensysteme beider Schiffe gut zu erkennen. In den Verläufen von Absenkung und Trimm in Abb. 5.50 sind wieder die instationären Anfahrvorgänge, die etwas länger als eine Minute dauern, zu erkennen. Im Trimmverlauf des Fahrgastschiffs wird ersichtlich, wie das Schiff zwischen 120 s und 300 s die primäre Welle des Küstenmotorschiffs durchfährt. Das Küstenmotorschiff hingegen zeigt kleine Reaktionen auf die Wellen des Passagierschiffs in der Absenkung zwischen 300 s und 420 s.

In einem dritten Fall überholt das Küstenmotorschiff ( $V = 5.6$  m/s) das Fahrgastschiff ( $V = 4.2$  m/s). Die Zeitreihe der Wellenbilder ist in Abb. 5.51 und der Verlauf von Ab-

senkung und Trimm ist in Abb. 5.52 dargestellt. Hier ist eine deutlich größere Reaktion des Fahrgastschiffs auf die Wellen des Küstenmotorschiffs zu finden, vor allem weil die Wellen des Küstenmotorschiff im Vergleich zur vorhergehenden Simulation aufgrund der höheren Geschwindigkeit deutlich größer sind. Besonders im Zeitverlauf der Absenkung wird beim Fahrgastschiff zuerst die Wirkung der primären Welle und darauffolgend die höherfrequente Schwingung, hervorgerufen durch die sekundären Wellen, deutlich. Die dynamische Schwimmelage des Küstenmotorschiffs wird von dem kleineren Binnenfahrgastschiff nicht sichtbar beeinflusst.

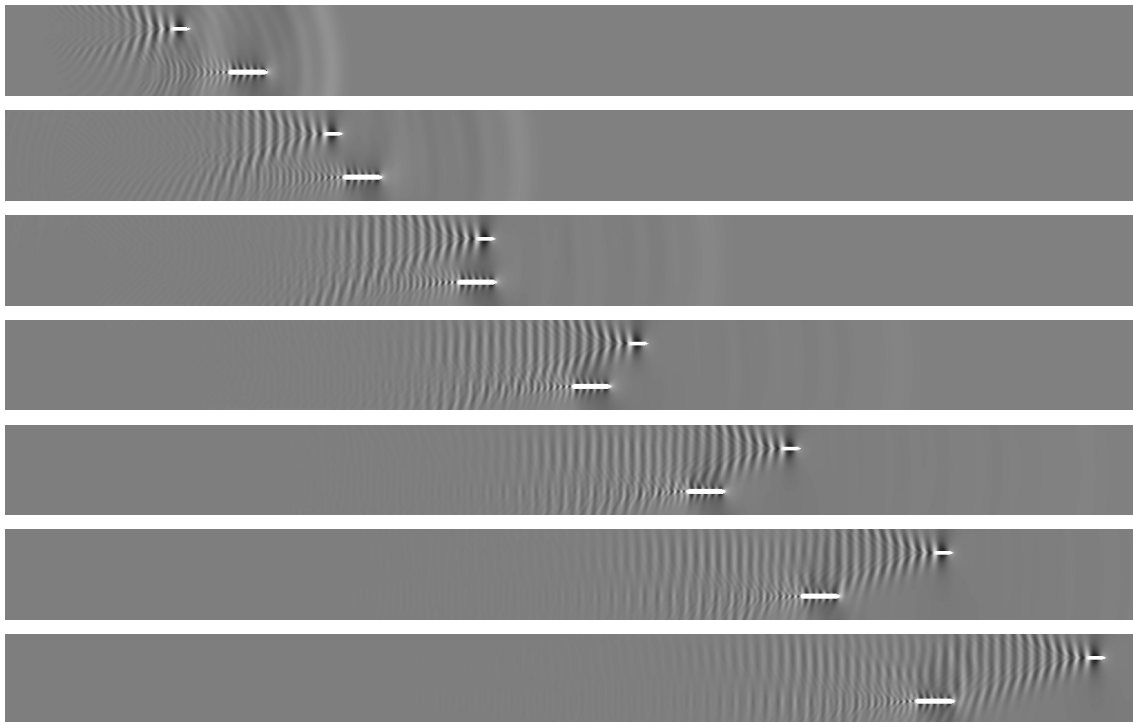


Abb. 5.49 Zeitreihe der Wellenbilder beim Überholen eines Küstenmotorschiffs durch ein Passagierschiff (nach 60 s, 120 s, 180 s, 240 s, 300 s, 360 s und 420 s). Das Küstenmotorschiff fährt mit 4.2 m/s, das Fahrgastschiff mit 5.6 m/s.

Im vierten Fall überholt das Küstenmotorschiff mit 4.2 m/s das Binnenfahrgastschiff mit 2.8 m/s. Im Gegensatz zum zweiten Fall ist die Wellenbildung durch das Fahrgastschiff so gering, daß das Küstenmotorschiff nicht beeinflusst wird. Das Fahrgastschiff selbst erfährt eine sichtbare Wirkung alleine durch die primäre Welle des Küstenmotorschiffs, dessen sekundäres Wellensystem aufgrund der geringen Geschwindigkeit nur schwach ausgeprägt ist.

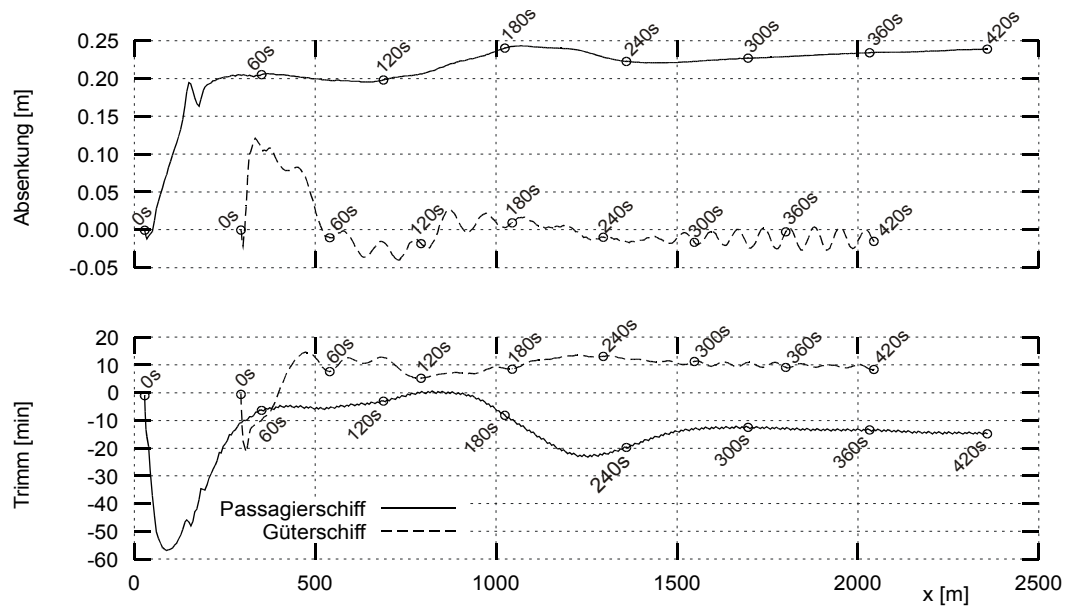


Abb. 5.50 Dynamische Absenkung und dynamischer Trimm; das Fahrgastschiff überholt das Küstenmotorschiff. Das Küstenmotorschiff fährt mit 4.2 m/s, das Fahrgastschiff mit 5.6 m/s.

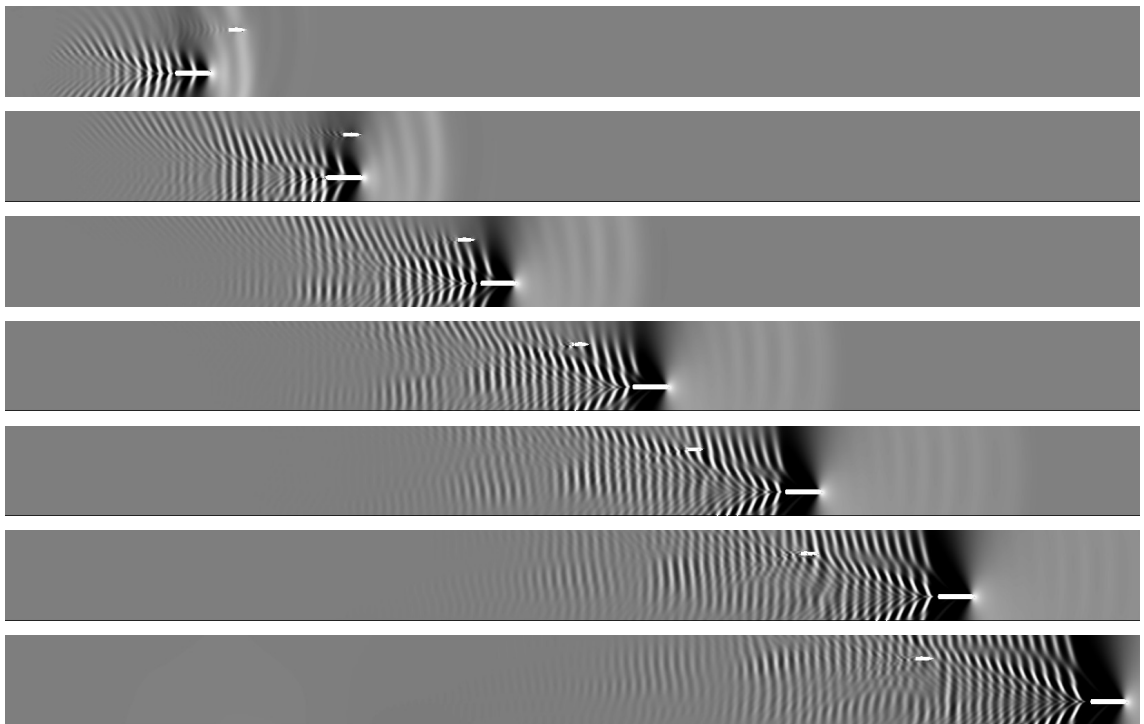


Abb. 5.51 Zeitreihe der Wellenbilder beim Überholen eines Fahrgastschiffs durch ein Küstenmotorschiff (nach 60 s, 120 s, 180 s, 240 s, 300 s, 360 s und 420 s). Das Küstenmotorschiff fährt mit 5.6 m/s, das Fahrgastschiff mit 4.2 m/s.

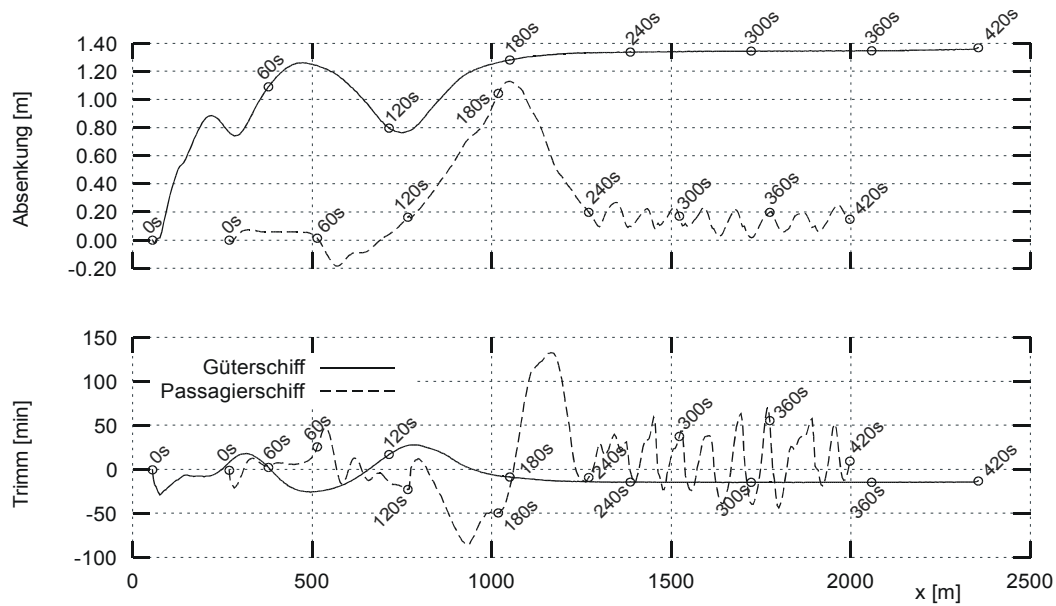


Abb. 5.52 Dynamische Absenkung und dynamischer Trimm; das Küstenmotorschiff überholt das Fahrgastschiff. Das Küstenmotorschiff fährt mit 5.6 m/s, das Fahrgastschiff mit 4.2 m/s.

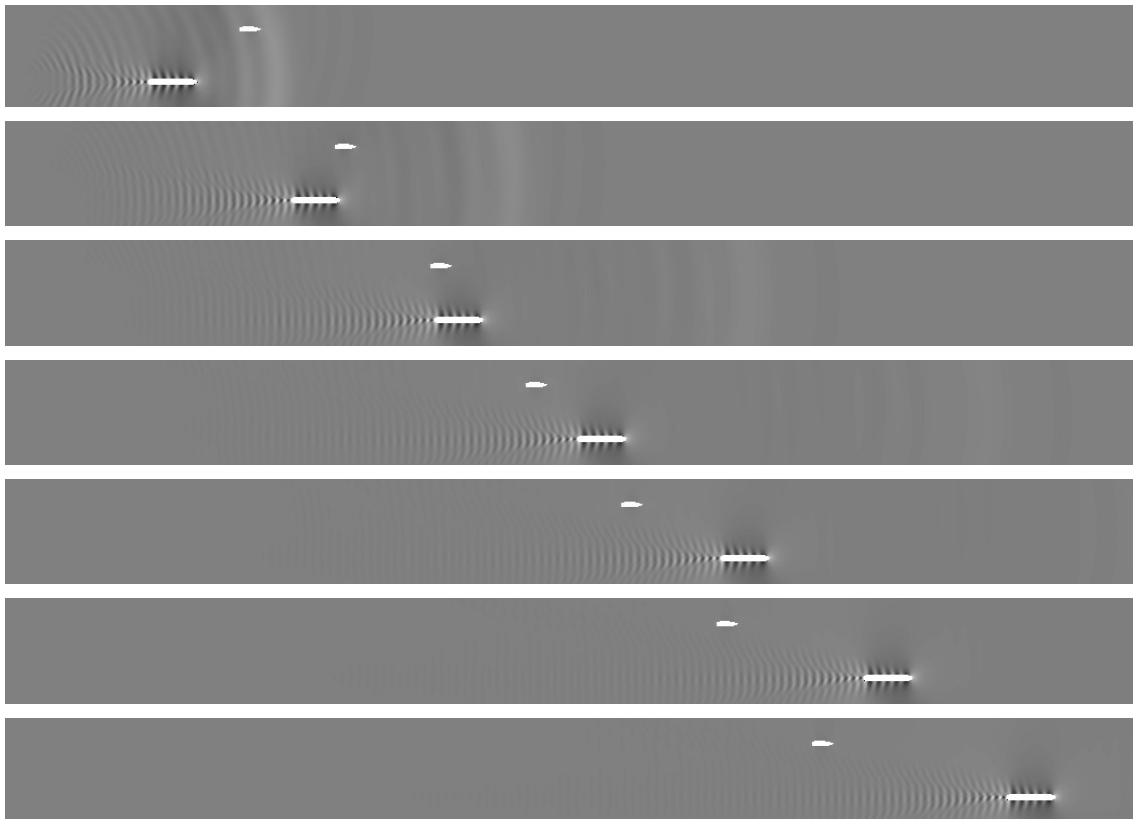


Abb. 5.53 Zeitreihe der Wellenbilder beim Überholen eines Fahrgastschiffs durch ein Küstenmotorschiff (nach 60 s, 120 s, 180 s, 240 s, 300 s, 360 s und 420 s). Das Küstenmotorschiff fährt mit 4.2 m/s, das Fahrgastschiff mit 2.8 m/s.

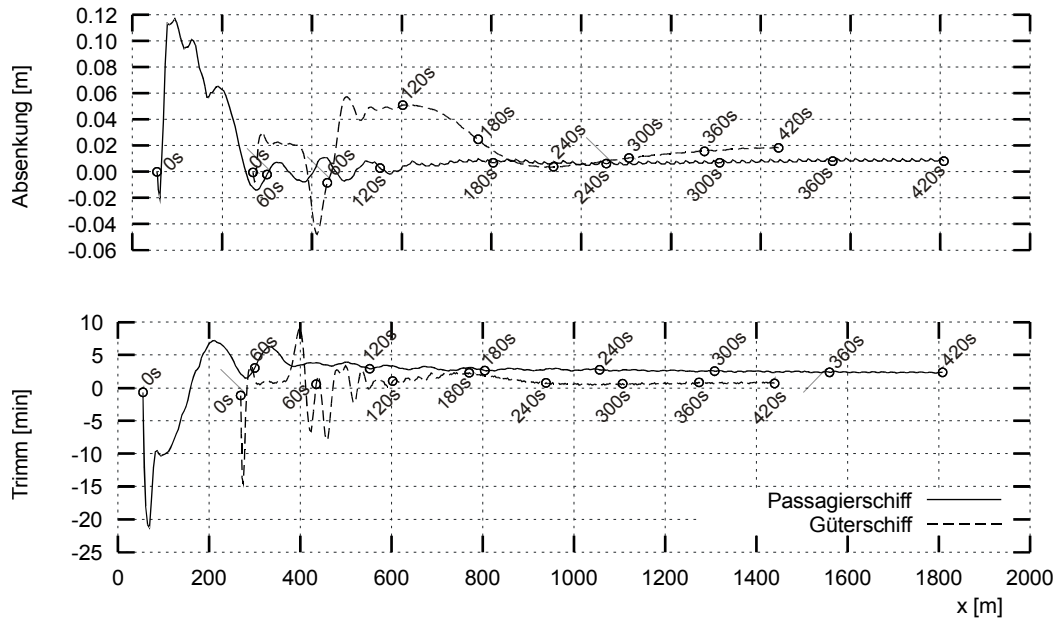


Abb. 5.54 Dynamische Absenkung und dynamischer Trimm; das Küstenmotorschiff überholt das Fahrgastschiff. Das Küstenmotorschiff fährt mit 4.2 m/s, das Fahrgastschiff mit 2.8 m/s.

Abschließend werden je ein Begegnungs- und Überholvorgang gezeigt, für die Meßwerte aus vergleichbaren Modellversuchen vorliegen (vgl. DST-Bericht 1818C). Diese wurden vom DST dankenswerterweise zur Verfügung gestellt. In dieser Untersuchung wurden zwei Leichter im Widerstandsversuch im großen Versuchstank geschleppt. Im ersten Fall überholt eine Leichter mit einer Großausführungsgeschwindigkeit von 13.4 km/h einen zweiten mit 9 km/h. Der lichte Abstand zwischen den Bordwänden beträgt 10 m. Die gemessenen und berechneten Werte des überholten Leichters für Trimm und Absenkung sind in Abb. 5.55 über einer sog. dimensionslosen Längskoordinate  $x_R$  aufgetragen. Das Überholmanöver beginnt bei  $x_R = -1$  und endet bei  $x_R = 1$ . In Abb. 5.56 sind Trimm und Absenkung für eine Begegnungsmanöver der beiden Leichter dargestellt, bei dem beide Leichter mit einer Geschwindigkeit von 13.4 km/h fahren. Der lichte Abstand zwischen den Bordwänden beträgt hier nur 2.5 m. Abgesehen von einer kleinen Differenz in der Absenkung beim Überholmanöver zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den Messungen und den Berechnungen. Dies gilt sogar für den Begegnungsfall, bei dem aufgrund des geringen Abstands zwischen den Leichtern die Überlappungszone sehr schmal gewählt werden mußte.

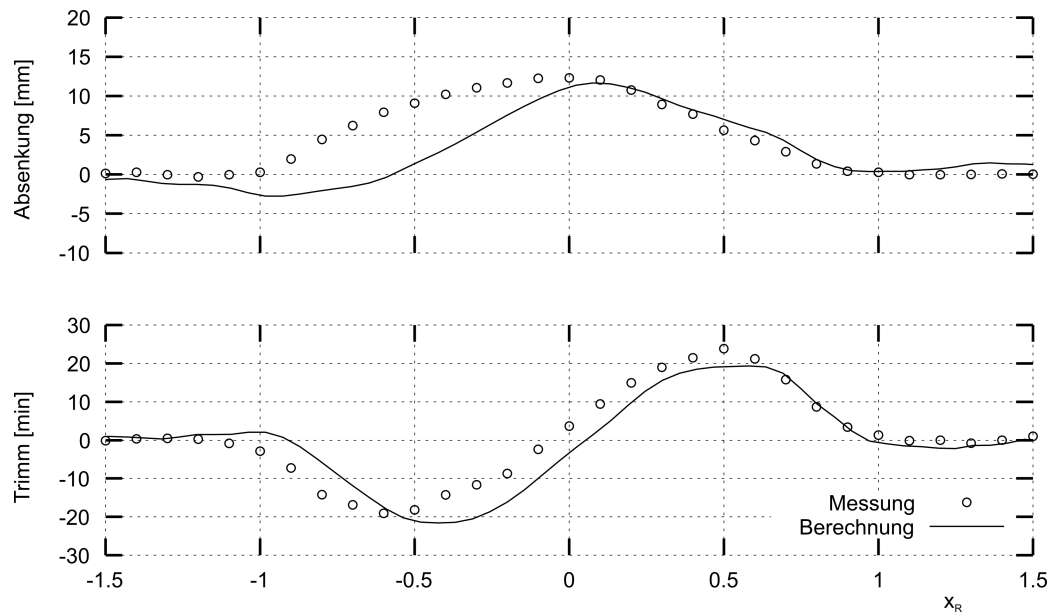


Abb. 5.55 Absenkung und Trimm aufgetragen über der dimensionslosen Längskoordinate; Überholvorgang zweier Leichter mit 9 km/h und 13.4 km/h.

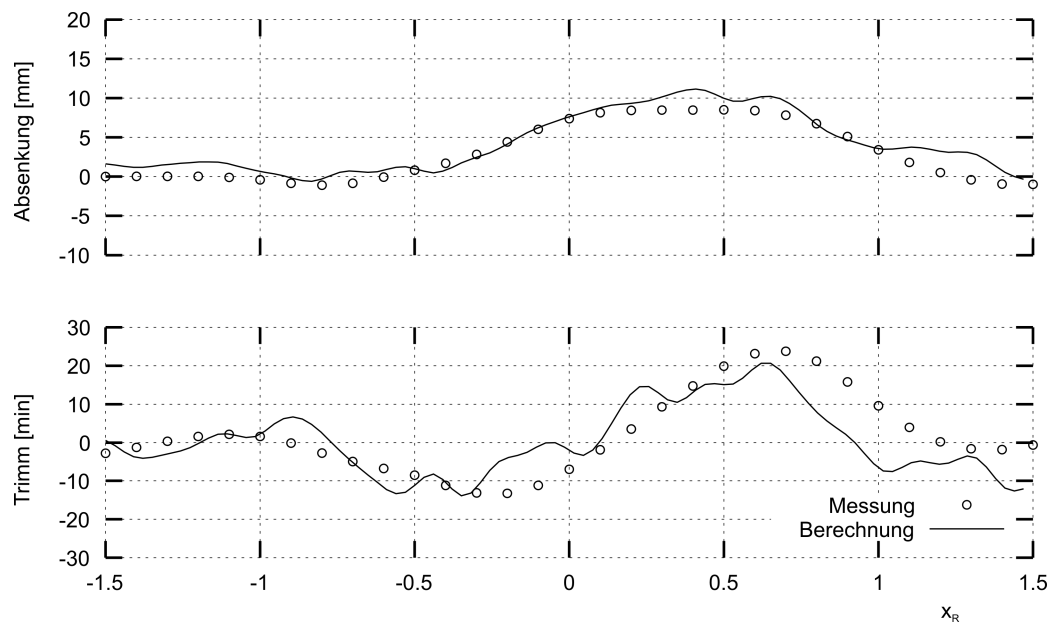


Abb. 5.56 Absenkung und Trimm aufgetragen über der dimensionslosen Längskoordinate; Begegnung zweier Leichter mit 13.4 km/h.





## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Anhand zahlreicher Beispiele konnte gezeigt werden, daß sich die Ausbreitung von Schiffswellen in Wasser begrenzter Tiefe mit Gleichungen vom Boussinesq-Typ effizient simulieren läßt. Dazu wurde ein Programm entwickelt, das so allgemein konzipiert ist, daß die numerischen Untersuchungen mit verschiedenen Flachwasserapproximationen durchgeführt werden konnten. Ohne Änderungen an der Programmstruktur können damit beliebige Differentialgleichungssysteme mit drei Feldvariablen auf kartesischen Gittern mit einem linearisierten Finite-Differenzen-Verfahren gelöst werden. Das implizite Crank-Nicolson-Schema zeigt sich dabei äußerst robust. Mit nur geringen Änderungen am Programm könnte die Anzahl der Feldvariablen beliebig erhöht werden und eine lokale Gitterverfeinerung implementiert werden. Das Programm arbeitet mit einer Multi-Domain-Technik und kann so neben verschiedenen internen Rechengebieten, grundsätzlich auch die Lösungen externer Programme bidirektional koppeln. Die Schnittstellen müssen hierzu individuell angepaßt werden.

In dieser Arbeit wurden beide Aspekte der Ausbreitung von Schiffswellen untersucht: die Entstehung der Wellen am Rumpf selbst und deren Ausbreitung in großen Flachwassergebieten. Soweit möglich wurden zuerst alle Detailspekte isoliert untersucht und anhand von Messungen validiert.

Die Simulation der Wellenausbreitung im schmalen Wellenkanal über eine Bodenschwelle hinweg zeigt eine gute Übereinstimmung mit Messungen und weist gleichzeitig auf Schwierigkeiten im Dispersionsverhalten für sehr kurze Wellen hin. Anhand weiterer Beispiele mit einem geänderten Bodenprofil wurde die Wechselwirkung zwischen Wellen und Bodentopographie eingehend erläutert. Für die untersuchten Fälle kann festgestellt werden, daß die Wellenausbreitung mit den Boussinesq-Gleichungen mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden kann.

Die Ausbreitung einer Solitonwelle in einem Kanal mit diagonal zum Berechnungsgitter verlaufenden Wänden zeigt, daß die treppenstufige Approximation der Wände keine nennenswerten Schwierigkeiten bereitet. Damit kann das Finite-Differenzen-

Schema mit dem kartesischen Gitter auch bei nicht kartesischen Gebietsberandungen verwendet werden. Auf die numerisch sehr viel aufwendigere Diskretisierung mittels eines nicht kartesischen Gitters oder sogar einer Finite-Elemente-Methode kann deshalb verzichtet werden.

Die Wechselwirkung der Strömung mit einer Bodenstörung kann zwar qualitativ erfaßt werden, das Verfahren ist aber zu ungenau, als daß es für die untersuchten Fälle praktisch eingesetzt werden könnte. Zudem finden sich in Flüssen viele Situationen, in denen die Flachwasserapproximation grundsätzlich versagt. So bildet sich bei sehr flach getauchten Buhnen leicht eine schießende Strömung aus. Und durch das Zusammenwirken von Strömung und Schiffswellen kann der Buhnenkopf ganz freigespült werden.

Die weiteren Untersuchungen erfolgten in Zusammenhang mit einem Schiff. Zur Erzeugung der Schiffswellen wurden die Schiffe mit der Schlankkörpertheorie modelliert. Zusätzlich wurden Lösungen eines externen Paneelverfahrens mit den Flachwassergebiet gekoppelt. Beide Verfahren wurden validiert. Dabei zeigte sich zunächst, daß die berechnete Wellenbildung eines Küstenmotorschiffs mit der aus Modellversuchen sehr gut übereinstimmte. Eine nicht ganz zufriedenstellende Übereinstimmung findet sich bei den Berechnungen mit einem Containerschiff in der Elbe. Während die Ausbreitung der primären Wellen über weite Strecken sehr gut berechnet wird, ist die Ausbreitung des sekundären Wellensystems in der Simulation nicht zufriedenstellend.

Die Interaktion von Schiffswellen mit der Bodentopographie wurde mit Modellversuchen verglichen. Darüber hinaus wurde die vielfältige Anwendbarkeit des Berechnungsverfahrens anhand einiger demonstrativer Simulationen dargestellt.

Die Berechnung von Trimm und Absenkung ergab eine gute Übereinstimmung mit den Messungen, solange das Versperrungsverhältnis nicht zu groß war. Besonders in sehr engen Kanälen ist das Strömungsgebiet allerdings so klein, daß hier andere numerische Verfahren, die die schiffsnahe Umströmung besser auflösen, geeigneter sind. In seitlich unbegrenzten Gewässern kann die dynamische Schwimmlage mit der Schlankkörpertheorie genau genug berechnet werden, um damit eine Umrechnung der Schleppleistung zwischen verschiedenen Wassertiefen durchzuführen, vgl. Kamar und Jiang (2002) und Jianf und Friedhoff (2003).

Die Anwendung der vereinheitlichten Flachwassertheorie ist auf Rumpfformen ohne Bugwulst beschränkt, und auch die exakte Schiffsgeometrie läßt sich wegen der Verwendung eines kartesischen Gitters schlecht modellieren. Die Wellenbildung und die hydrodynamischen Kräfte, die auf einen vertikal oszillierenden Zylinder wirken, ließen sich jedoch sehr gut berechnen. Dieser spezielle Fall der Wellenerzeugung läßt sich weder mit einer Druckapproximation noch mit der Schlankkörpertheorie berechnen. Er

demonstriert ein mögliches Anwendungsgebiet der vereinheitlichten Flachwassertheorie.

Als weiteres Verfahren zur Berechnung der schiffserzeugten Wellen wurde ein potentialtheorietisches Paneelverfahren herangezogen, dessen Berechnungsergebnis mit dem Flachwasserverfahren gekoppelt wurde. Dabei zeigt sich, daß die durch die Kopplung berechneten Wellen denen entsprechen, die mit dem Paneelverfahren alleine berechnet wurden. Es wurde damit gezeigt, daß die Ausbreitung der Wellen über die Kopplungsgrenze hinweg durch die Kopplung nicht beeinflußt wird. Darüber hinaus zeigt der Vergleich der Wellenbilder mit den Messungen aus dem Modellversuch eine sehr gute Übereinstimmung.

Durch die interaktive Kopplung mehrerer Rechengebiete konnte die Wellenausbreitung von sich begegnenden oder überholenden Schiffen berechnet werden. Während für das Wellenbild keine Messwerte zum Vergleich zur Verfügung standen, zeigen die zeitlichen Verläufe der dynamischen Schwimmlage in der Berechnung und im Versuch eine sehr gute Übereinstimmung.

Abschließend wurde das entwickelte numerische Verfahren zur Simulation einiger beispielhafter Anwendungsfälle verwendet. So kann der Einfluß der Kanalgeometrie auf die Wellenausbreitung berechnet werden. Das Verfahren kann damit eine Hilfestellung bei der Planung von Baumaßnahmen an Wasserstraßen sein. Eine sehr aufwendige Baumaßnahme, mit der der Übergang von flachem auf tiefes Wasser erleichtert werden soll, wurde von Feldtmann und Garner vorgeschlagen und hier simuliert.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Flachwasserapproximation z. Zt. das einzige handhabbare Verfahren zur Simulation der Ausbreitung von Schiffswellen im flachen Wasser mit veränderlicher Bodentopographie in großen Rechengebieten ist. Die Berechnungen zeigen in den meisten Fällen eine gute Übereinstimmung mit Meßergebnissen, allerdings sind einige Schwächen deutlich geworden, die gleichsam eine Anregung für weitere Forschung sind: Das Dispersionsverhalten kann zwar durch immer verfeinerte Approximationen verbessert werden, jedoch zeigt sich im Zusammenspiel mit einer starken Strömung eine große Abweichung von den Messungen. Ein möglicher Ausweg wäre das Abrücken von der Boussinesq-Approximation im Ansatz für die vertikale Geschwindigkeitsverteilung durch eine Taylor-Entwicklung, hin zu einem Geschwindigkeitsprofil (im Sinne einer Ansatzfunktion), das die Strömungswirkung und evtl. sogar die Grenzschicht berücksichtigt.

Ein weiteres großes Problem sind flache Uferbereiche, bzw. die sich durch die Wellenbewegung ergebenden Wasserwechselzonen. Sofern sich diese am Rande des Rechengebiets befinden und die exakte Wellenhöhe am Strand nicht gesucht ist, kann die durch das flache Ufer hervorgerufene Dämpfung durch implizite Dämpfungsterme in den

Impulsgleichungen oder durch eine Schwammdämpfung berücksichtigt werden. Bei nur leicht getauchten Buhnen in Flüssen, die die Wellenausbreitung sehr stark beeinflussen, muß eine andere Lösung gefunden werden. Denkbar wäre die Berechnung des Buhnumfeldes durch andere Verfahren (z. B. Euler oder RANSE) mit einer Kopplung an das Flachwasserverfahren. Alternativ könnten spezielle, noch herzuleitende Feldgleichungen das Trockenfallen von Punkten im Berechnungsgebiet erfassen.

## 7 Literaturverzeichnis

- Jochen Aberle: *Untersuchung der Rauheitsstruktur zur Bestimmung des Fließwiderstandes in Gebirgsbächen unter Klarwasserabfluß*, Dissertation an der Universität Karlsruhe, 2000
- M. B. Abbott, A. D. McCowan and I. R. Warren: *Accuracy of short wave numerical models*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110, No. 10 (1984), pp. 1287–1301
- D. Ambrosi: *A new finite element scheme for the Boussinesq equations*, *Mathematical Models and Methods in Applied Science*, Vol. 7, No. 2 (1997), pp. 193–209
- P. Ananthakrishnan: *Surface Waves Generated by a Translating Two-dimensional Body: Effects of Viscosity*, Ph. D. Dissertation, Univ. of Cal., Berkley 1991
- Owe Axelsson: *Iterative Solution Methods*, Cambridge University Press 1996
- G. S. Baker: *Notes on Model Experiments*, NECI Report, 1915
- B. Banijamali: *A study of enhanced Boussinesq equations and their numerical modeling*. Ph.D. thesis, Aalborg University and International Research Centre for Computational Hydrodynamics (ICCH), Danish Hydraulic Institute, Denmark
- Bryan Barrass: *Ship Squat*, Polytech International, 1978
- Richard Barrett et al.: *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Block for Iterative Methods*, SIAM Philadelphia 1994,  
<http://www.netlib.org/templates/Templates.html>
- H. Blasius: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, in *Zeitschriften für Mathematik und Physik*, Band 56, 1908
- Joseph Valentin Boussinesq: *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal; en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond*, *J. Math. Pures Appliq. Ser. II* 17 (1872), S. 55–108
- T. Brooke Benjamin: *Upstream influence*, in *J. Fluid Mech.* Vol. 40, 1970, pp. 49–79

- Peter Chang, W. K. Melville and John W. Miles: *On the evolutions of a solitary wave in a gradually varying channel*, in Journal of Fluid Mechanics, Vol. 95, Part 3 (1979), pp. 401–414
- Qin Chen: *The Study of Wave-Blocking and Current Effects on Nonlinear Interactions of Shallow-Water Waves using Advanced Boussinesq Models*, Ph.D. Thesis at the Old Dominion University, Michigan, 1997
- Qin Chen, Per A. Madsen, Hemming A. Schäffer and David R. Basco: *Wave-current interaction based on an enhanced Boussinesq approach*, in Coastal Engineering Vol. 33, 1998, pp. 11–39
- Xue-Nong Chen, Som Deo Sharma: *Ship entry into a lock*, Proc. of the 16<sup>th</sup> Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Hiroshima/Japan 2001, pp. 21–24
- Xue-Nong Chen, Som Deo Sharma: *Zero wave resistance for ships moving in shallow channels at supercritical speeds*, in Journal of Fluid Mechanics Vol. 335, 1997, pp. 305–321
- Maarten W. Dingemans: *Water Wave Propagation Over Uneven Bottoms (Part 1 and 2)*, World Scientific Publishing, 1997
- I. S. Duff, A.M. Erisman and J. K. Reid: *Direct Methods for Sparse Matrices*, Oxford Science Publications 1990
- R. C. Ertekin, W. C. Webster and J. V. Wehausen: *Ship-Generated Solitons*, Proc. of the 15<sup>th</sup> Symposium on Naval Hydrodynamics, Washinton D.C. 1985, pp. 347–364
- R. C. Ertekin, W. C. Webster and J. V. Wehausen: *Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width*, J. Fluid Mech., vol. 169 (1986), pp. 275–292
- Mats Feldtmann, John Garner: *Seabed modifications to prevent wake wash from fast ferries*, *Proceedings of the RINA International Conference on Coastal Ships and Inland Waterways*, London 1999
- Mats Feldtmann: *Early Assessment limits wake wash effects*, in Speed at Sea, February 2001, pp. 12–15
- Maurício Gobbi, James T. Kirby: *Wave evolution over submerged sills: tests of a higher order Boussinesq model*, Coastal Engineering 37 (1999), pp. 57–96
- W. Hackbusch: *Iterative Lösung großer schwach besetzter Gleichungssysteme*, Teubner Studienbücher, Stuttgart 1993
- T. H. Havelock: *The Propagation of Groups of Waves in Dispersive Media, With Application to Waves on Water Produced by a Travelling Disturbance*, Proc. Royal Society, Vol. 81 (1908), London.

- G. W. Hedstrom: *Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems*, J. Comp. Phys., vol. 30 (1979), pp. 222-237
- Rupert Henn: *Berechnung von Flachwasserwellen mittels Boussinesq-Gleichungen*, Diplomarbeit am Institut für Schiffstechnik und Transportsysteme, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, 1999
- Rupert Henn, Rainer Kaiser, Sven List: *SICHERBIN - Verbesserung der Verkehrssicherheit auf Binnenwasserstraßen an Engpass- und Gefahrenstellen*, DST-Bericht 1818, Teil C: Numerische Untersuchungen, Duisburg 2007
- Tao Jiang: *Ship Waves in Shallow Water*, Fortschrittsberichte VDI, Reihe 12, Nr. 466, VDI Verlag, Düsseldorf 2001
- Tao Jiang, Benjamin Friedhoff: *Über die Umrechnung des Widerstands und der Propulsionseigenschaften von einer auf eine andere Wassertiefe*, Jahrbuch der Schiffbau-technischen Gesellschaft, 2003
- Ivar G. Jonson: *Wave-current interactions*, Report No. S 49, May 1989, The Technical University of Denmark
- Laila Kamar, Tao Jiang: *Über die Widerstandsprognose von Schiffen auf flachem Wasser*, in Binnenschifffahrt, Nr. 12, 2002
- Theodor von Kármán: *Über laminare und turbulente Reibung*, in Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Nr. 1 (1921), S. 233–252
- Harald Keil: *Die hydrodynamischen Kräfte bei der periodischen Bewegung zweidimensionaler Körper an der Oberfläche flacher Gewässer*, Institut für Schiffbau der Univ. Hamburg, Bericht Nr. 305, Feb 1974
- M. S. Longuet-Higgins, F. R. S. and E. D. Cokelet: *The deformation of steep surface waves on water, I. A numerical method of computation*, Proc. R. Soc. Lond., A350 (1976), pp. 1–26
- Philip L.-F. Liu, Sung B. Yoon and James T. Kirby: *Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water*, J. Fluid Mech., vol. 153 (1985), pp. 185-201
- Per A. Madsen, Russel Murray and Ole R. Sørensen: *A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics*, Coastal Engineering, vol. 15 (1991), pp. 371-388
- Per A. Madsen and Ole R. Sørensen: *A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry*, Coastal Engineering, vol. 18 (1992), pp. 183–204
- J. Mathew, T. R. Akylas: *On three-dimensional long water waves in a channel with sloping sidewalls*, J. Fluid Mech., vol. 215 (1990), pp. 289-307

- Chiang C. Mei, B. Le Méhauté: Note on the equations of long waves over an uneven bottom, *J. Geophys. Res.*, vol. 71 (1966), pp. 393–400
- Chiang C. Mei, Hang S. Choi: *Forces on a slender ship advancing near the critical speed in a wide canal*, *J. Fluid. Mech.*, vol. 179 (1987), pp. 59–76
- John W. Miles: *Damping of weakly nonlinear shallow-water waves*, *Journal of Fluid Mechanics* vol. 76/2 (1976), pp. 251–257
- Okey Nwogu: *Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation*, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, vol. 119, No. 6 (1993), pp. 618–639
- I. Orlanski: *A Simple Boundary Condition for Unbounded Hyperbolic Flows*, *J. Comp. Phys.*, vol. 21 (1976), pp. 251–269
- Axel Panoeh: *Experimentelle und numerische Untersuchungen von vertikal oszillierenden Körpern auf flachem Wasser*, Studienarbeit am Institut für Schiffstechnik Duisburg, Juli 2001
- Geir Pedersen: *On the numerical solution of the Boussinesq equations*, 1988
- Geir Pedersen: *Three-dimensional wave patterns generated by moving disturbances at transcritical speeds*, *J. Fluid. Mech.*, vol. 196, (1988), pp. 39–63
- D. H. Peregrine: *Long waves on a beach*, *J. Fluid Mech.*, vol. 27 (1967), pp. 815–827
- J. E. Romate: *Absorbing Boundary Conditions for Free Surface Waves*, *Journal of Computational Physics*, vol. 99 (1992), pp. 135–145
- Römisch, K.: *Der „Squat“ im begrenzten Fahrwasser – Betrachtungen aus hydromechanischer Sicht*, in *Schiff & Hafen/Seewirtschaft*, Heft 10/1993
- John Scott Russell: *Report on Waves*, Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844 (London 1845), pp. 311–390,
- Yousef Saad and Martin H. Schultz: *GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems*, in *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* Vol. 7, No. 3, July 1986, pp. 856–869
- Nils Salvesen, C. von Kerczek: *Nonlinear Aspects of Subcritical Shallow-Water Flow Past Two-Dimensional Obstructions*, *J. Ship Res.*, vol. 22 (Dec 1978), No. 4, pp. 203–211
- P. D. Scarlatos: *Estuarine Hydraulics*, pp. 289–348 in: Vijay P. Singh and Willi Hager (ed.): *Environmental Hydraulics*, Kluwer Academic Publishers 1996
- Hemming A. Schäffer, Per A. Madsen: *Further enhancements of Boussinesq-type equations*, *Coastal Engineering*, vol. 26 (1995), pp. 1–14



- Hermann Schlichting: *Grenzschicht-Theorie*, Braun, Karlsruhe 1965
- A. Schröter: *Nichtlineare zeitdiskrete Seegangssimulation im flachen und tieferen Wasser*, Dissertation, Institut für Strömungsmechanik und elektronisches Rechnen im Bauwesen der Universität Hannover, Bericht Nr. 42, 1995
- Ralph Shapiro: *Smoothing, Filtering, and Boundary Effects*, Reviews of Physics and Space Physics, vol. 8 (May 1970), No. 2, pp. 359–387
- Ralph Shapiro: *Linear Filtering*, Mathematics of Computation, vol. 29 (Oct 1975), No. 132, pp. 1094–1097
- Som Deo Sharma: *A Comparison of the Calculated and Measured Free-Wave Spectrum of an Inuid in Steady Motion*, Proc. Int. Seminar on Theoretical Wave Resistance, Ann Arbor, Michigan/USA, 1963, pp. 201-257,270
- Ole R. Sørensen, Hemming A. Schäffer, Per A. Madsen, and Rolf Deigaard: *Wave Breaking and Induced Nearshore Circulations*, Coastal Engineering, vol. (1994)
- Norbert Stuntz et al.: *Close Coupling of Viscous 3D Flow and Shallow WaterWave Simulations*, in Proc. of the 8<sup>th</sup> International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Busan/Korea 2003
- N. Sugimoto, Y. Kusaka and T. Kakutani: Reflection of a shallow-water soliton. Part 1. Edge layer for shallow-water waves, Journal of Fluid Mechanics, vol. 146 (1984), pp. 369-382
- N. Sugimoto and T. Kakutani: Reflection of a shallow-water soliton. Part 2. Numerical evaluation, Journal of Fluid Mechanics, vol. 178 (1987), pp. 99-117
- Yong Ming Tang: *The effect of barriers on the tidal range in estauries*,
- E. O. Tuck: *Hydrodynamic Problems of Ships in Restricted Waters*, Ann. Rev. Fluid. Mech., 10 (1978), pp. 33–46
- M. Walkley, M. Berzins: *A finite element method for the one-dimensional extended Boussinesq equations*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 29 (1999), pp. 143–157
- Mark Andrew Walkley: *A numerical method for extended boussinesq shallow-water wave equations*, Ph.D. thesis at the University of Leeds, School of Computer Studies, September 1999
- De-Ming Wu, Theodore Y. Wu: *Three-Dimensional Nonlinear Long Waves Due to Moving Surface Pressure*, in Proceedings of the 14<sup>th</sup> Symposium on Naval Hydrodynamics, Ann Arbor/USA, 1982, pp. 501–522
- Ronald W. Yeung, P. Ananthakrishnan: Oscillation of a floating body in a viscous fluid, in Journal of Engineering Mathematics, Vol. 26 (1992), pp. 211–230

- Sung B. Yoon and Philip L.-F. Liu: *Interactions of currents and weakly nonlinear water waves in shallow water*, J. Fluid Mech., vol. 153 (1985), pp. 185–201
- Sung B. Yoon and Philip L.-F. Liu: *Interactions of currents and weakly nonlinear water waves in shallow water*, in J. Fluid Mech., vol. 205 (1989), pp. 397–419
- Y. S. Yu and F. Ursell: *Surface waves generated by an oscillating circular cylinder on water of finite depth: theory and experiment*, in J. Fluid. Mech. Vol. 11, 1961, pp. 529–551

---

## Lebenslauf

12.04.1973      geboren in Trier

1979-1983      Grundschule in Kordel

1983-1992      Max-Planck-Gymnasium in Trier, abgeschlossen mit der allg. Hochschulreife

10/1992-09/1993 Grundwehrdienst beim Fernmeldebataillon 930 in Gerolstein

10/1993-04/1999 Studium der Schiffstechnik (D II) an der Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, abgeschlossen mit dem Diplom

05/1999-12/2003 wiss. Mitarbeiter an der Gerhard-Mercator-Universität Duisburg

seit 01/2004      wiss. Mitarbeiter am Entwicklungszentrum für Schiffstechnik und Transportsysteme in Duisburg